数学思维训练

初中数学思维训练经典题组

（七年级）

韩　涛　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

图书在版编目（CIP）数据
初中数学思维训练经典题组（七年级）/ 韩涛编著．—北京：电子工业出版社，2014.6
（数学思维训练）
ISBN 978-7-121-23376-0

Ⅰ．①初…　Ⅱ．①韩…　Ⅲ．①中学数学课—初中—习题集　Ⅳ．①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 113758 号

策划编辑：孙清先
责任编辑：徐云鹏　　特约编辑：史晶晶
印　　刷：北京千鹤印刷有限公司
装　　订：北京千鹤印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：9.25　字数：104 千字
版　　次：2014 年 6 月第 1 版
印　　次：2014 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：28.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。
质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。
服务热线：（010）88258888。

序　言

郑州的平行线教育是近年来办学成绩卓著的一所课外培训学校，在 2014 年华罗庚金杯少年数学邀请赛中，其学员囊括了郑州市初中前十名中的九名，小高组前十名中的八名。在《大河报》上经常可以看到有关平行线教育的相关报道。平行线的数学教育作为国家基础教育的补充和提高做出了良好的业绩，为中学基础教育选拔和培养了一批又一批优质的幼苗，深受学生、家长、社会的好评。

平行线这所年轻的培训学校、这样一批年轻的教师之所以创出了这样的业绩，靠的是正确的育人理念、拼搏奋斗的团队精神和精益求精的敬业精神；靠的是努力学习钻研、吸取百家之长，转化为自己经验的包容精神，脚踏实地地落实在集体备课、教材建设等基础建设之上。

平行线的数学教学遵循着“现实是基础，兴趣引入门，思维是核心，证明是灵魂”的理念，补充和完善了当前中小学数学基础教育中的不足，体现了高质量的数学素质教育。

每个中小学生都有自己的梦，正是每个人的梦汇集成了伟大的民族梦、中国梦。中国要建设成为世界第一流的强国，人才的培养是关键。而数学是人才培养中极为重要的基础学科。数学是锻炼思维的体操，是打开科学大门的钥匙，是攀登科学高峰的天梯。青少年时期学好数学、喜爱数学，与实现伟大中国梦的大方向完全一致，还是俗话说的好，学好数理化，建设祖国本领大！

平行线教育的《小学数学思维训练经典题组（六年级）》和《初中数学思维训练经典题组（七年级）》是值得有志于学好数学的同学选读的。读一读、算一算，想一想、做一做，希望通过学习能提高你的成绩，从中还可以体会：“成绩是开始，品格是永远”的道理。

华罗庚说：“学习科学时，必须掌握知难而进的原则。”

数学家的经验之谈：数学是算懂的，而不是看懂的。当然更不是听懂的。请你记住数学界流传的一句话：“上帝就在细节中！”（God is in the details）

我们坚信，每个人都可以通过刻苦努力学好数学，变得聪明起来！

首都师范大学数学科学学院

周春荔

2014 年 6 月 10 日

前　言

目前，很多家长和中学生只关注中考、高考，以为对于学生而言，这是关系他们升学前途的唯一途径，因为十几年前，高考的确是优秀学生进入高等院校的独木桥。但对于很多优秀的孩子来说，这远远不够，名校的自主招生，国内外的数学竞赛等会给他们带来更为广阔的天地，让他们有更大的作为，尤为重要的是数学思想、科学思维体系的构建让他们终身受益。尤其是近几年升入北大、清华、复旦等 985 高校的学员中自主招生的比例逐年加大，而自主招生对数学的要求远高于高考。为了更好帮助这些有梦想的孩子，本书应运而生。

本书的编写，以中考、名校自主招生、国内外竞赛所需求的能力为导向，而不是简单地割裂他们之间的联系，它具有以下几个特点：

第一、在构建知识体系的基础上更注重构建孩子的思维体系。

本书注重数学知识、数学方法的基础学习，先构建一个知识的平台，彻底夯实学生的基本功。在此基础上，通过多种变式，多个视角，去训练孩子如何思考问题，进而形成科学的思考习惯，而这种习惯又会让孩子对知识体系的认识上升到一个新的高度，形成一个良性循环的学习状态。

第二、突出题组设计——不同难度，同样的方法。

题组设计，从基础入手，通过提出反问题，特殊问题一般化，数量关系复杂化，放在不同背景下，和数论等其他知识结合等方面，层层拔高，环环相扣，从中考到竞赛，难度不同，却多题归一，本质的方法一样，让孩子在获得成就感的同时体会到数学的巨大魅力。

“技巧”是工具，“思路”是能力，建议师生朋友在使用本书的过程中，不仅关注“解题技巧”，更要关注“解题思路”，即使题目披着各种“外衣”，我们也能够找出解题的方法，进而打破只会做原题的“怪圈”。

虽然我们追求精益求精，但难免会有不当的地方，恳请各位同行、广大的师生朋友提出您宝贵的意见。

平行线教育　刘育涛 韩涛 刘丽娟

目 录

第1讲　有理数与数轴

主要内容

1． 数学的每一次重大发展，都与数学的应用范围拓宽、应用程度加深有关．比如如何用数去表示零下5摄氏度？这就必须要引入零以下的数，就必须要用“+”、“−”号去表示相反意义的量．

2． 我们把整数和分数统称为有理数，它又包括正有理数、零和负有理数．我们把正有理数和零统称为非负有理数；负有理数和零统称非正有理数．由此可见，零这个数是很特殊、很重要的，它既不是正数，也不是负数，一会儿我们还会学习到关于它的更多结论，同学们要注意总结．另外，非负数是初中数学、特别是数学竞赛的重要考点，关于非负数有个重要的结论：“若干非负数之和为0，则每个非负数都是0.”

3． 一个数是有理数，则一定可以写成$\frac{q}{p}(p\neq0)$，其中p，q都是整数且互质；其逆命题也成立．这是判断一个数是不是有理数的重要方法．

4． 数轴是表示实数的图形工具，数轴上的点与实数一一对应．牢记数轴三要素，通过数轴在有理数与绝对值相关问题中的灵活运用体会数形结合思想．

本讲重点： 数轴上的点与数的对应关系；难点是在利用数轴讨论时，要注意分类讨论，防止丢情况．

习　题

1. 判断题

（1）自然数就是正整数；

（2）正数和负数统称有理数；

（3）非正数就是负数；

（4）符号相反的两个数叫做相反数；

（5）有理数与数轴上的点一一对应；

（6）数轴三要素是原点、正方向与单位长度；

（7）3.1415926 不是有理数；

（8）正数与负数表示相反意义的量.

2. （1）在同一个问题中，正数与负数表示__________的量.

（2）如果用+5m 表示向东走 5m，则–3m 表示_____.

（3）肯德基、麦当劳和星巴克依次坐落在一条东西走向的大街上，肯德基在麦当劳西 20 米，星巴克在麦当劳东 100 米处，小王从麦当劳出来向东走了 10 米，再向东走–20 米，再向东走 30 米，再向东走–40 米，此时小王位于_________.

（4）一只跳蚤在一条直线上，从 A 点开始，第 1 次向右跳 1 个单位，第 2 次向左跳 2 个单位，第 3 次向右跳 3 个单位，第 4 次向左跳 4 个单位，…，当它跳第 2013 次落下时，落点处距离 A 点_______个单位.

（5）一个动点 P 从数轴上的原点出发，沿数轴的正方向以每前进 5 个单位、后退 3 个单位的程序运动，已知 P 每秒前进或后退 1 个单位，

设 x_n 为第 n 秒点 P 在数轴上的位置所对应的数，则 $x_{2013}=$______________.

3. （1）最小的自然数是______；最大的负整数是________.

（2）非正数与非负数共同包含的数是________；与自己的相反数是同一个数的数是__________________；与自己的倒数是同一个数的数是_____________；与自己的负倒数是同一个数的数是____________；与自己的绝对值是同一个数的数是___________.（如果满足要求的数不存在，就填“不存在”）

（3）数 $\frac{1}{a}$（$a\neq 0$）的相反数是_______；倒数是_________；负倒数是___________.

4. （1）下列各数中，有理数有________个，整数有__________个.

（A）3.14　　（B）$0.\dot{6}$　　（C）$\frac{1}{7}$

（D）π　　（E）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（F）$0.\dot{9}$，

（2）若 $a^2=\underbrace{11\cdots1}_{2013个2}\underbrace{22\cdots2}_{2014个2}5$，判断 a 是否是有理数并给出证明过程.

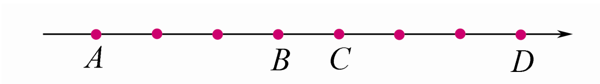
（3）若 $b^2=2$，判断 b 是否是有理数并给出证明过程.

5. （1）数轴上，到原点距离等于 3 的点所表示的数是________；

（2）数轴上，到表示 2 的点的距离等于 5 的点所表示的数是____________；

（注：上述两个问题给后面的某些绝对值的问题提供了几何方法）

（3）如图，数轴上标出若干点，每相邻两点相距 1 个单位，点 A，B，C，D 对应的数分别是整数 a，b，c，d，且 $d-2a=10$，则数轴的原点是点________.



（4）数轴上，点 A，B 表示的数分别是-2，-1，若点 N 位于 A，B 之间且 AN=2NB，则点 N 表示的数是　　　　　　　.

（和下面第 7 题（6）重复了，是否需要修改）

（5）数轴上有 A，B 两点，A，B 之间的距离为 1，点 A 与原点 O 的距离为 3，则所有满足条件的点 B 与原点的距离之和是_________.

6. （1）在数轴上任取一条长为 $2013\frac{1}{9}$ 的线段，则该线段在该条数轴上最多能盖多少个整数点?

（2）在 a 与 $-a$（$a>0$）之间有 2013 个整数：

① 若 a 与 $-a$ 之间不包含 a 与 $-a$，求 a 的取值范围；

② 若 a 与 $-a$ 之间包含 a 与 $-a$，求 a 的取值范围.

7. （1）数轴上−4 和 18 所对应点之间的线段的中点代表数______.

（2）数 5 和________所对应的点的之间的线段中点是$-\frac{2}{3}$.（这两道题感觉叙述不合适，点没有中点，是否需要修改？）

（3）在数轴上，表示数$(\frac{a}{2}+2)$的点与表示数$(\frac{a}{3}+2)$的点关于原点对称，则$a=$________.

（4）在数轴上，表示数$(\frac{a}{2}+2)$的点与表示数$(\frac{a}{3}+2)$的点关于$-\frac{2}{3}$所对应的点对称，则$a=$________.

（5）点 A，B 分别表示-3，$-\frac{1}{2}$在数轴上对应的点，使线段 AB 沿数轴向右移动为 A_1B_1，且线段 A_1B_1 的中点对应的数为 3，则点 A_1 对应数是________，点 A 移动的距离是__________.

（6）数轴上，点 A，B 表示的数分别是−2，−1，若点 N 位于 A，B 之间且 AN=2NB，则点 N 表示的数是几?

（7）点 A，B 分别表示-3，$-\frac{1}{2}$在数轴上对应的点，求线段 AB 的三等分点所对应的数.

（8）点 A，B 分别表示数 a，b 在数轴上对应的点，若点 C 将 AB 分成两段 AC、CB（为简化考虑，点 C 位于 A、B 两点之间且不是 B 点），设$\lambda=\frac{AB}{BC}$，则点 C 对应的数是多少？（用含 a，b，λ 的式子表示）

（9）数轴上的点 A 和点 B 之间距离是 28 个单位长度，点 A 在原点左侧，距离原点 8 个单位长度，回答下面问题：

① 点 B 所对应的数是多少？

② 若点 B 在原点右侧．点 A 以每秒 1 个单位长度的速度出发向左运动，同时 B 以每秒 3 个单位长度的速度出发也向左运动，在点 C 处追上了点 A，求点 C 对应的数．

③ 若点 B 在原点右侧．点 M 从点 A 出发向右运动，速度为每秒 1 个单位长度，同时点 N 从点 B 出发也向右运动，速度为每秒 2 个单位长度，设线段 NO 的中点为 P（O 为原点），在运动过程中线段 $PO-AM$ 的值是否变化？若不变，求其值；若变化，请说明理由．

8. 如果数轴上一个点所对应的数是一个质数，则称其为质数点．在数轴的 0～110 之间有三个动点 A，B，C，点 A、B 向数轴的正方向运动，点 C 向数轴的负方向运动．A、B、C 三个点的移动速度比是 3∶4∶3，开始时三个点都在质数点上．当 A 和 C 在一个质数点上重合时，B 恰好移动到另一个质数点．一段时间后，当 B 和 C 在重合一个质数点时，A 恰好移动到另一个质数点．当 B 和 A 重合时，三个点的位置仍在 0～110 之间，那么此时 C 点对应的数是多少？

第 2 讲　绝对值初步

主要内容

1. 绝对值的认识要从代数意义与几何意义两个角度入手，取绝对值既是一种计算，在几何上还代表“一段距离”.

2. 利用绝对值的代数意义，常要用到分类讨论的方法:

① $|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$　② $|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$　③ $|a|=\begin{cases}a(a>0)\\-a(a\leqslant 0)\end{cases}$

3. 结合几何意义深刻理解绝对值的非负性，解题时常要用到下述重要结论：若干非负数的和为 0，则每一个加数都是 0.

4. 零点分段法是化简含有多个绝对值符号或多重绝对值式子的有效工具，常用来求某些含绝对值的式子的最值.

5. 熟练掌握下述绝对值的性质:

（1）任何一个数的绝对值都不小于这个数，也不小于这个数的相反数，即 $|a|\geqslant a$，且 $|a|\geqslant -a$.

（2）若 $|a|=|b|$，则 $a=b$ 或 $a=-b$.

（3）$|ab|=|a|\cdot|b|$；$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

（4）$|a|^2=|a^2|=a^2$.

（5）$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

对于 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，当且仅当 a、b 同号或 a、b 中至少有一个为 0 时，

等号成立;

对于$\left||a|-|b|\right|\leqslant|a+b|$，当且仅当$a$、$b$异号或$a$、$b$中至少有一个为0时，等号成立.

习题

1. 解下列各题

（1）下列各组判断中，正确的是（　　）

A. 若$|a|=b$，则一定有$a=b$

B. 若$|a|>|b|$，则一定有$a>b$

C. 若$|a|>b$，则一定有$|a|>|b|$

D. 若$|a|=b$，则一定有$a^2=(-b)^2$

（2）若$a^2>b^2$，则正确的是（　　）

A. $a>b$　　B. $|a|>|b|$　　C. $a<b$　　D. $|a|<|b|$

（3）下列式子中正确的是（　　）

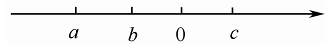
A. $|a|>-a$　B. $|a|<-a$　　C. $|a|\leqslant -a$　D. $|a|\geqslant -a$

（4）对于$|m-1|$，下列结论正确的是（　　）

A. $|m-1|\geqslant|m|$　　　B. $|m-1|\leqslant|m|$

C. $|m-1|\geqslant|m|-1$　　D. $|m-1|\leqslant|m|-1$

（5）数a，b，c的大小关系如图，则下列式子中一定成立的是（　　）



A. $a+b+c>0$　　B. $|a+b|<c$

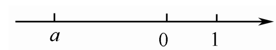
C. $|a-c|=|a|+c$　　D. $|b-c|>|c-a|$

2. 解下列各题

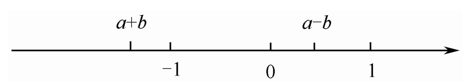
（1）绝对值等于 6 的数是多少？绝对值不超过 6 的整数有几个？绝对值小于 6 的非正整数有哪些？

（2）已知 $|x-5|=3$，求 x 的值.

（3）已知 a 在数轴上的位置如图所示，且 $|a+1|=2$，求 $|3a+7|$ 的值.



（4）已知有理数 a、b 的和 $a+b$ 及差 $a-b$ 在数轴上如图所示，化简 $|2a+b|-2|a|-|b-7|$.



（5）若 $a<b<0<c$，化简：$|a-b|+|a+b|-|c-a|+2|b-c|$.

（6）已知 $x<0<z,\ xy>0,\ |y|>|z|>|x|$，求 $|x+z|+|y+z|-|x-y|$ 的值.

（7）已知 $x=2014$，求 $\left|4x^2-5x+9\right|-4\left|x^2+2x+2\right|+3x+7$ 的值.

（8）已知 $|m|=-m$，化简：$|m-1|-|m-2|$.

（9）已知 $|2x-3|=3-2x$，求 x 的取值范围.

（10）满足 $(a-b)^2+(b-a)|a-b|=ab$（$ab\neq 0$）的有理数 a、b，一定不满足的关系是（　　）

A. $ab<0$　　B. $ab>0$　　C. $a+b>0$　　D. $a+b<0$

（11）a、b、c 分别是一个三位数的百、十、个位上的数字，且 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $|a-b|+|b-c|+|c-a|$ 可能取得的最大值是多少?

3. 解下列各题

（1）已知 $|x|=5$，$|y|=1$，则 $\big||x-y|-|x+y|\big|=$______.

（2）非零整数 m，n 满足 $|m|+|n|-5=0$，则所有这样的整数（m，n）共有________组.

（3）求出所有满足条件 $|a-b|+ab=1$ 的非负整数对 (a,b).

（4）若 a，b，c 为整数，且 $|a-b|^{19}+|c-a|^{99}=1$，求 $|c-a|+|a-b|+|b-c|$ 的值.

（5）已知 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$，且 a，b，c 都不等于 0，求 x 的所有可能值.

（6）有理数 a，b，c 均不为 0，且 $a+b+c=0$，设 $x=\left|\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{c+a}+\frac{|c|}{a+b}\right|$，求代数式 $x^{19}-99x+2013$ 的值.

（7）已知 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 且 $abc<0$，求代数式 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 的值.

（8）已知 $abc\neq 0$，求 $\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}$ 的值.

4. 解下列各题

（1）已知 $|x-4|+(y+2)^{2014}=0$，求 y^x 的值.

（2）已知 $|ab-2|$ 与 $|b-1|$ 互为相反数，求下述代数式的值.

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2013)(b+2013)}$$

5. 解下列各题

（1）化简：

①$|3-x|$　　　②$|x+1|+|x+2|$

③$|3x-2|+|2x+3|$　　④$|x+11|+|x-12|+|x+13|$.

（2）互不相等的有理数 a，b，c 在数轴上的对应点分别为 A，B，C，若$|a-b|+|c-a|=|b-c|$，则在点 A，B，C 中居中的是哪个点?

（3）若 $x<-2$，化简$|1-|1+x||$.

（4）①解方程：$|x-2|+|x+1|=7$；②求 $y=|x-2|+|x+1|$ 的最小值.

（5）$|x+1|+|x-1|$ 的最小值是________.

（6）$|x-7|+|x-8|+|x-9|$ 的最小值是________.

（7）①当 x 取何值时，$y=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2012|$ 有最小值.

②当 x 取何值时，$y=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2013|$ 有最小值.

（8）求函数 $y=|2x+6|-4|x+1|+|x-1|$ 的最值.

（9）若 $2a+|4-5a|+|1-3a|$ 的值是定值 A，回答下面两问：①化简$||a-1|-1|-1|$；②求 A^{2013} 的末两位数字.

（10）若 a 是正整数，不等式$|x+a|+|x-a|+|x|\leqslant 2013$ 有解，求 a 的最大值.

（11）求 $y=\|\cdots\|x_1-x_2|-x_3|-\cdots|-x_{2014}|$ 的最大值，其中 x_1，x_2,…，x_{2014} 是 1，2，…，2014 的任一排列.

第 3 讲　有理数计算（一）

主要内容

主要涉及有理数的基本运算、速算技巧等.

习题

1. 计算

（1）$-0.5-(-3\frac{1}{4})+2.75-(+7\frac{1}{2})$

（2）$[1.4-(-3.6+5.2)-4.3]-(-1.5)$

（3）$-9+(+\frac{4}{5})-(-12)-\{-[-(-5)]\}$

2. 计算

（1）$8\frac{12}{13}\times\frac{12}{19}+19\frac{2}{13}\times13\frac{1}{19}$

（2）$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10})+(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{10})+(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{10})+\cdots+(\frac{8}{9}+\frac{8}{10})+\frac{9}{10}$

（3）$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots-2012^2+2013^2$

（4）$\dfrac{\frac{8+9+10}{7}-\frac{9+10+11}{8}+\frac{10+11+12}{9}-\frac{11+12+13}{10}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$

（5）$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{99}{100!}$

（6）$\dfrac{3!\times 1}{3}+\dfrac{4!\times 2}{3^2}+\dfrac{5!\times 3}{3^3}+\cdots+\dfrac{102!\times 100}{3^{100}}$

3. 计算

（1）$\dfrac{(-3)^4-[-(-1)^3\div(-2.5)+2\frac{1}{4}\times(-2^2)]}{-0.2+\frac{3}{5}}$

（2）$\left|\dfrac{2012+\frac{5}{3}[(-\frac{3}{5})^2+(-\frac{1}{2})^3\div(-0.625)]\div(-2\frac{4}{5})}{-(-1)^{2012}-(\frac{1}{2}-\frac{7}{6})^4\times(1\frac{5}{8}-5)}\right|$

（3）$503\times\dfrac{3\frac{3}{4}\times 2.6-3\div(-1\frac{1}{3})}{\frac{\left|1^2-2^3+3^4+(-4)^5\right|}{(-1)^{2012}\times 2}+0.\dot{2}\dot{8}\times 99}\times(-2)^2$

（4）$\dfrac{-5^2\div\frac{1}{5}\times 5+(2^3-3^2)^{2013}\times\left|(\frac{3}{4})^2-(\frac{4}{3})^2\right|\div\frac{1}{10}}{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30})^3}$

4. 对于给定的正奇数 n，定义

$$f(n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}$$

计算 $2013\times f(2011)-2(f(1)+f(3)+\cdots+f(2011))$.

第 4 讲　有理数计算（二）

主要内容

在上一讲基础上，要求同学们进一步深刻理解有理数的运算法则，灵活运用相反数、绝对值、倒数、负倒数等基本概念，求解与有理数计算相关的各种问题.

习题

一、解下列各题

1. 设 $a<0$，在代数式 $|a|$，$-a$，a^{2013}，a^{2014}，$|-a|$，$(\frac{a^2}{a}+a)$，$(\frac{a^2}{a}-a)$ 中负数的个数是________.

2. 若 $\frac{x-y}{a}=\frac{y-z}{b}=\frac{z-x}{c}=abc<0$，则 a，b，c 中有______个负数.

3. 若 x，y，z 两两不相等，则 $\frac{x-y}{y-z}$，$\frac{y-z}{z-x}$，$\frac{z-x}{x-y}$ 中有______个负数.

二、解下列各题

1. 若 a，b 互为相反数，c，d 互为倒数，x 的绝对值等于 2，则 x^4+cdx^2-a-b 的值是________.

2. 若 a 是最大的负整数，b 是绝对值最小的有理数，c 是倒数等于它本身的自然数，则 $a^{2013}+2014b+c^{2015}=$__________.

3. 若 a 是最大的负整数，b 是绝对值最小的有理数，c 是倒数等于它本身的数，则 $a^{2013}+2014b+c^{2015}=$________.

4. 已知 a，b 互为负倒数，c，d 互为相反数，$e<0$ 且 $|e|=1$，则 $(-ab)^{2013}+(c+d)^{2014}-e^{2015}=$__________.

三、解下列各题

1. 整数 a,b,c,d 满足 $abcd=25$，且 $a>b>c>d$，则 $|a+b|+|c+d|=$_____.

2. a,b,c,d 是互不相等正整数，且 $abcd=441$，则 $a+b+c+d=$_______.

3. a，b，c，d 是互不相等的正整数，且 $(7-a)(7-b)(7-c)(7-d)=4$，则 $a+b+c+d=$________.

4. a，b，c，d 是互不相等的整数，且满足 $a+b+c+d=5$，若 m 是关于 x 的方程 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=2014$ 中大于 a，b，c，d 的一个整数根，则 $m=$________.

5. 自然数 a，b，c，d 满足 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$，则 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^5}+\frac{1}{d^6}=$ __________.

6. 若 a，c，d 是整数，b 是正整数，且 $a+b=c$，$b+c=d$，$c+d=a$，则 $a+b+c+d$ 的最大值是_________.

四、解下列各题

1. 三个互不相等的有理数，既可分别表示为 1，$a+b$，a 的形式，又可表示为 0，$\frac{a}{b}$，b 的形式，求 $a^{2014}+b^{2013}$.

2. 在 $x+y$，$x-y$，xy，$\frac{x}{y}$ 四个数中有 3 个的数值相同，求所有这样的数对（x，y）.

五、解下列各题

1. 若 $|a+b|=a-b$，则 $ab=$________.

2. 若 a，b，c 满足 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 且 $abc<0$，则 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=$__________.

3. $||m|+2m|=3$，则 $m=$________.

4. 若 $(a+b)^2+|b+5|=b+5$，且 $|2a-b-1|=0$，则 $ab=$________.

5. 在 1，2，…，2014 前面任意添上正号和负号，求其非负和的最小值.

六、解下列各题

1. 若五个有理数 a，b，c，d，e 满足 $a+b+c+d+e>0$，将它们排成一排，从左到右进行相加，至少有多少种排法能使相加过程中的每一个和都是正数?

2. 一个有限的有理数数列中，任意 7 个连续项之和都是负数，而任意 11 个连续项之和都是正数，问这个数列最多有多少项?

3. 在 $n\times n(n\geqslant 3)$ 个方格的正方形表格中，按下列规则在各个方格中填上 ± 1：

（1）表格边缘上的所有方格中都填上 -1；

（2）对于任一空格，将它所在行或列中两侧离它最近的两个已填数方格中所填的两数之积填入此空格中这样做下去，直到表中的空格全部填满为止.

求：①在表中可能得到 $+1$ 的最多个数；

②在表中可能得到 $+1$ 的最少个数.

第 5 讲　科学记数法、代数式的概念

主要内容

一、科学记数法：用来表示一些绝对值大于 10 或小于 1 的数.

绝对值大于 10 的数：利用 10 的正整数次幂，把一个绝对值大于 10 的数表示成 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 n 是正整数，$1\leqslant|a|<10$. 如 864000 表示成 8.64×10^{5}.

绝对值小于 1 的数：利用 10 的负整数次幂，把一个绝对值小于 1 的数表示成 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 n 是正整数，$1\leqslant|a|<10$. 如 0.000021 表示成 2.1×10^{-5}.

习题

1. 我国每 km^2 的土地上，一年从太阳得到的能量相当于燃烧 130000t 煤所产生的能量，130000 用科学记数法表示为（　　）

A. 13×10^{4}　　　B. 1.3×10^{5}

C. 0.13×10^{6}　　　D. 1.3×10^{8}

2. 我国国土面积为 $9.597\times10^{6}\text{km}^2$，将其表示为普通表示法为_______ km^2.

3. 光速是 30 万 km/s，则光传播 1h 的距离是___ m.

4. 神九发射成功，一条相关微博被转发 3570000 次，该数用科学记

数法表示为__________.

5. 一种花的花粉颗粒直径约为 0.0000065m，用科学记数法表示为（　　）

A. 6.5×10^{-5}　　B. 6.5×10^{-6}

C. 6.5×10^{-7}　　D. 65×10^{-6}

二、代数式：用基本的运算符号把数和表示数的字母连接而成的式子叫做代数式，特别地，单独一个数或字母也叫代数式，特别注意：代数式中不含“=”，“＞”，“＜”，“≠”等符号.

1. 下列各式中有______个代数式.

① $\frac{3}{2}x+1$　② $S=\pi r^2$　③ π　④ $2a>b$　⑤ abc　⑥ 0

⑦ $\frac{3}{a^2-b^2}$　⑧ $\overline{abc}$

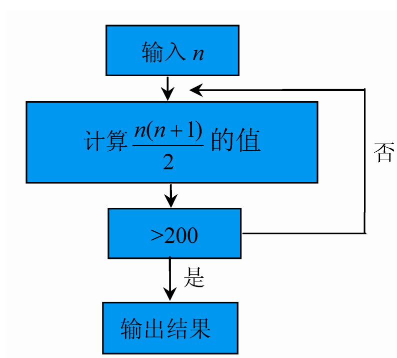
2. 在式子 $0.5xy+1$，$2\div x$，$\frac{1}{2}(x+y)$，a^3，$-8\frac{3}{4}a^2bc$，$4\times xy$ 中，符合代数式书写要求的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. 体育委员会带了 500 元钱去买体育用品，已知一个足球 a 元，一个篮球 b 元，则代数式 $500-3a-3b$ 表示的数为__________.

4. 按如图程序计算，若开始输入 n 的值为 3，则输出结果是__________.



5. 下列各式中，不符合代数式书写要求的有____________.

①$2\frac{1}{2}x$　②$t-2$℃　③$3\div(a-b)$　④$x\times10$　⑤$\frac{7}{3}x$

注：熟记代数式书写格式的规范.

三、整式

（1）单项式：数与字母的积叫单项式．单独一个数或一个字母也是单项式.

两个重要概念：①系数　②次数

（2）多项式

①项　②常数项　③次数　④升幂与降幂排列

（3）代数式的分类

1. 下列式子中是单项式的有________，是多项式的有__________.

（1）$\frac{xy}{3}$　（2）$5a$　（3）$x-y=0$　（4）$-\frac{3}{4}x^2yz$　（5）a

（6）$x-y$　（7）$\frac{1}{x}$　（8）0　（9）3．14　（10）$-m+1$

（11）$\frac{x+y}{2}$　（12）π

2. 下列判断中正确的有（　　）

①$-\frac{a^2b}{\pi}$不是单项式　②$\frac{a+c}{2}$是多项式　③$\frac{x+1}{x}$不是整式　④π是有理式　⑤0 不是单项式

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

3. 若$3x^{m-2}-(n-1)x+1$是关于 x 的二次二项式，求 m，n.

4. 对于多项式：$3x^2-\frac{3}{4}x^4y-1.3+2xy^2$，求：

①是几次几项式?

②写出它的各项.

③常数项是哪个?

④按关于 x 升幂排列.

5. m，n 都是自然数，多项式 $a^m+b^{2n}-2^{m+n}$ 的次数是（　　）

A. m　B. $2n$　C. $m+2n$　D. m、$2n$ 中较大的

6.（1）同时含字母 a，b，c，且系数是 1 的 7 次单项式共有___个；

（2）由字母 a，b，c 组成（未必同时含有），且系数是 1 的 7 次单项式共______个.

7. $-\pi^4x^2y+\frac{5}{3}xyz+(\pi+2)$ 是几次几项式?

8. 若单项式 $3a^2b^{3m-4}$ 与 $\frac{1}{3}x^3y^2z^2$ 的次数相同，求 m.

第 6 讲　整式运算（一）整式加减

主要内容

1. 熟练掌握与整式相关的概念，并能应用概念挖掘题目中的隐含条件.

2. 整式的加减，实质就是合并同类项．整式化简的时候，观察式子结构，选择合适的运算顺序．特别地，当去括号或添括号时，要注意符号、漏乘等问题.

3. 代数式求值，除了掌握最基本的化简求值类型外，还要能够根据条件和目标的特点，利用整体代换、 赋值、巧选主元、凑配等方法解决问题.

习题

1. 概念复习

（1）在代数式 $\frac{ab}{5}$，$-4x$，$\frac{2ab}{x}$，$-\frac{2}{3}abc$，a，0，0.85，$a-b$ 中，单项式有（　　）

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

（2）在代数式 $\frac{abc^2}{2}$，$2x^4-1$，$\frac{c}{7}+\frac{1}{d}$，$\frac{a+b}{2}$，$\frac{m+n}{m}$ 中，多项式有（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

（3）$3x^2-\frac{3}{4}x^4y+\pi^6xy^3-1.3$ 是___次___项式，将其按关于 x 降幂排列为________，系数绝对值最小的项的系数为________.

（4）由字母 a，b，c（不一定同时含有）组成的系数为 -1 的十二次单项式共____个.

2. 默写同类项的定义

3. 判断下列各组中的两项是否是同类项

（1）$3x^2y$ 和 $3xy^2$　（2）$4a^2b$ 和 $4a^2c$　　（3）$\frac{1}{3}x^3y$ 和 $25yx^3$

（4）$3a^2b$ 和 $5a^2bc$　（5）$-\frac{4}{3}\pi^4x^2y$ 和 $68yx^2$（6）0 和π（7）x^3 和 5^3

4.（1）单项式 $-\frac{1}{2}a^{2n-1}b^4$ 与 $3ab^{8m}$ 是同类项，则 $(1+n)^{100}(1-m)^{102}$ =________.

（2）设 m，n 都不为 0，$3x^2y^3$ 和 $-5x^{2+2m+n}y^3$ 是同类项，求 $\frac{3m^3-m^2n+3mn^2+9n^3}{5m^3+3m^2n-6mn^2+9n^3}$ 的值.

（3）$2x^{|m|+3}y^7$ 与 $nx^6y^{|n|-1}$ 是同类项，则 $m^2+n^2=$_____.

（4）$4x^{m+5}y^2$ 与 $-x^3y^n$ 的和是单项式，则 $m^n=$ _____.

（5）$a^3b^m+x^{n-1}y^{3m-t}-a^{t-s}b^{n+1}+x^{2m-5}y^{s+n}$ 的化简结果是单项式，则 $mnst$ =________.

（6）若多项式 $7x^my^2+3xy+n$ 与多项式 $nx^4y^2+3xy+7$ 相等，则 $m=$___，n=________.

（7）下面两串单项式各有2013个单项式：

xy^2，x^4y^5，x^7y^8，…，$x^{3n+1}y^{3n+2}$，…，$x^{6034}y^{6035}$，$x^{6037}y^{6038}$；

x^2y^3，x^7y^8，$x^{12}y^{13}$，…$x^{5m+2}y^{5m+3}$，…，$x^{10057}y^{10058}$，$x^{10062}y^{10063}$

其中 n，m 为非负整数，则这两串单项式中共有_____对同类项.

5. 化简：（1）$3x^2+(-x^2+2x+1)-(2x^2+2x-1)$

（2）$2a-3\{b-[3a-(2b-a)]-2a\}$

6. （1）若多项式 $6x^2-x+8$ 的2倍减去一个多项式得 $5x^2+3x-7$，则这个多项式为________；

（2）一个多项式 A 减去多项式 $2x^2+5x-3$ 的2倍，马虎同学将减号抄成了加号，计算结果是 $-x^2+3x-7$，则正确的计算结果应该是__________.

7. （1）先化简后求值：

① 求代数 $x-\{y-2x+[3x-2(2x+y)+5y]\}$ 的值，若 $|x-10|$ 与 $(y+1)^2$ 互为相反数.

② 求代数式 $3(x^2+7y^2+3z^2-4xy-2yz-2xz)-2(-7x^2+5y^2+2z^2-2xy+3yz)$ 的值，其中 x=333，y=667，z=1000.

（2）①若 $m^2-mn=21$，$mn-n^2=-15$，则 $m^2-2mn+n^2=$________.

②若 $x^2+xy=2$，$y^2+xy=5$，则 $\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{3}{2}y^2=$________.

（3）①若 $a-2b=-3$，则 $3(a-b)-3(3b-a+1)=$________.

②若 $m-n=-1$，则 $(m-n)^2-2m+2n$ 的值=__________.

③当 $x=-1$ 时，代数式 $2ax^3-3bx+8$ 的值是18，此时代数式

$9b-6a+2=$________.

④如果 $x=1$ 时，代数式 $2ax^3+3bx+4$ 的值是 5，那么 $x=-1$ 时，代数式 $2ax^3+3bx+4$ 的值是___________.

⑤当 $x=-2$ 时，代数值 $ax^{2013}+bx+1$ 的值为 6，则当 $x=2$ 时，代数式 $ax^{2013}+bx+1$ 的值是_________.

⑥当 $x=-2$ 时，代数值 $ax^{2014}+bx^2+1$ 的值为 6，则当 $x=2$ 时，代数式 $ax^{2014}+bx^2-1$ 的值是_________.

⑦当 $x=2$ 时，代数式 ax^3-bx+1 的值为 -17，当 $x=-1$ 时，代数式 $12ax-3bx^3-5$ 的值为_________.

⑧当 $x=2$，$y=-4$ 时，代数式 $ax^3+\frac{1}{2}by+4=2014$，求当 $x=-4$，$y=-\frac{1}{2}$ 时，代数式 $3ax-24by^3+4986$ 的值.

⑨ $y=ax^7+bx^5+cx^3+dx+e$，当 $x=2$ 时，$y=23$；当 $x=-2$ 时，$y=-35$，则 $e=$_________.

⑩关于 x 的二次多项式 $a(x^3-x^2+3x)+\ b(2x^2+x)+x^3-5$，当 $x=2$ 时，多项式的值为 -17，求当 $x=-2$ 时，该多项式的值.

（4）关于 x 的整系数二次三项式 ax^2+bx+c，当 x 取 1，3，6，8 时，某同学算得这个二次三项式的值 y 分别是 1，5，25，50. 经验算，只有一个是错误的，这个错误的结果是（　　）

A. $x=1$ 时，$y=1$　　　B. $x=3$ 时，$y=5$

C. $x=6$ 时，$y=25$　　D. $x=3$ 时，$y=50$

（5）①若 $a-b=2004$，$b-c=-2005$，$c-d=2007$，则 $\frac{(a-c)(b-d)}{a-d}$ =__________.

②若 $x-y=a$，$z-y=10$，求代数式 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ 的最小值.

③若 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k$，则 $k=$________.

④若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{c}$，求 $\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}$ 的值.

8. （1）多项式 ax^3-3x^2-cx+b 与 x^3+bx^2+ax+d 的和是 ax^2+bx-c，则 $abcd=$________.

（2）多项式 $3x^2+my-8$ 与多项式 $-nx^2+2y+7$ 的差中，不含 x，y，求 m，n.

（3）若 $A=2x^2+3xy-2x-1$，$B=x^2-xy-1$，且 $3A-6B$ 的值与 x 的取值无关，试求 y 的值.

（4）已知代数式 $2xy-4(x-y+1)$ 的值与 x 的取值无关，试求 $2xy-4(x-y+1)$ 的值.

（5）多项式 $(2x^2+ax-y+6)-(2bx^2-3x+5y-1)$

①若多项式的值与 x 取值无关，求 a，b 的值.

②在①的条件下，求多项式 $3(a^2-2ab-b^2)-(3a^2+ab+b^2)$ 的值.

③在①条件下，求 $(b+a^2)+(2b+\frac{1}{1\times2}\cdot a^2)+(3b+\frac{1}{2\times3}\cdot a^2)+\cdots+(9b+\frac{1}{8\times9}\cdot a^2)$

的值.

（6）已知 $P=3xy-8x+1$，$Q=x-2xy-2$，当 $x\neq 0$ 时，$3P-2Q=7$ 恒成立．求 y 的值.

（7）当 a 取符合 $na+2014\neq 0$ 的任意整数时，式子 $\dfrac{ma-2013}{na+2014}$ 的值都是一个定值，且 $n+m=1$，则 $m=$______.

（8）7 张如图 1 所示的长为 a，宽为 b（$a>b$）的小长方形纸片，按图 2 的方式不重叠地放在矩形 $ABCD$ 内，未被覆盖的部分（两个矩形）用阴影表示，设左上角与右下角的阴影部分的面积差为 S，当 BC 的长度变化时，按照同样的放置方式，S 始终保持不变，则 a，b 满足（　　）

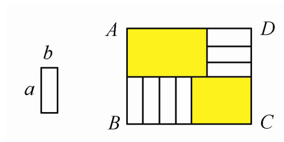


图 1　　　　图 2

A. $a=\dfrac{5}{2}b$　B. $a=3b$　C. $a=\dfrac{7}{2}b$　D. $a=4b$

9. ①若 $x^2+x-1=0$，则 $x^3+2x^2-7=$________.

②若 $x^2+x-2=0$，则 $x^3+2x^2-x+2013=$_______.

③若 $x^2+x=1$，则 $x^4+2x^3-x^2-2x+2014=$_______.

10.（1）设 $(3x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

求：① $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$

② $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1$

③ $a_5-a_4+a_3-a_2+a_1-a_0$

④ $a_4+a_2+a_0$

⑤ $|a_5|+|a_4|+|a_3|+|a_2|+|a_1|$

（2）定义一种新运算 $x\Delta y$ 满足：$x\Delta x=1$，$x\Delta(y\Delta z)=(x\Delta y)+z-1$，

那么 $2014\Delta2013$ 的值是________.

（3）二次三项式 ax^2+bx+c 的系数都是正数，且当 x 是整数时多项式的值也是整数，求 a 的最小值.

第 7 讲　含参数的一次方程（组）

主要内容

1. 本讲在大家已经熟练掌握了等式、等式的基本性质，方程、方程的解、解方程，一元一次方程、二元一次方程及其解法的基础上，进一步讨论字母系数的一次方程的解法;

2. 当方程的系数是字母的时候，字母在不同范围内取值，方程的解有可能不同，因此含字母系数的方程的求解，要特别重视分类讨论，不要丢情况;

3. 熟练掌握关于 x 的方程：$ax=b$ 的解的讨论，许多含参数的一元或多元一次方程（组）最终可化归成这种形式；有些题目是告诉你解的情况，反过来求字母系数的取值或范围;

4. 注意主元法的应用：有些字母系数的问题需要“反客为主”，把未知数看作参数，把参数看作未知数.

预备知识复习：

1.（1）什么叫等式？可分为哪三种基本类型?

（2）下列算式中，等式有________个.

①$x\leqslant 1$　②$\pi=3.14$　③$x^2=1$　④$1+2=3$　⑤$x+1=x+3$

2. 什么是方程？什么是方程的解？什么是解方程？

3. 什么是一元一次方程？下列方程是一元一次方程的有________.

①$2x-6=0$ ②$\frac{1}{2}(3x+4)=2x-10$ ③$\frac{1}{x}+2=8$ ④$x^2+2=6$

⑤$x=0$ ⑥$3x+4y=9$ ⑦$ax+3=0$（x是未知数） ⑧$t+x=2x-5+t$（x，t是未知数）

4. 复习小学时学过的解一元一次方程的方法，其依据是等式的________.

5. 解方程

①$x-\frac{3}{4}[x-\frac{1}{4}(x-\frac{3}{7})]=\frac{3}{16}(x-\frac{3}{7})$

②$\frac{0.3x+0.8}{0.5}-\frac{0.02x+0.3}{0.3}-1=\frac{0.8x-0.4}{3}$（迎春杯）

③$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-3)-3]\right\}-3=0$（希望杯）

④定义新运算$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，解方程$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3-x & 5 \end{vmatrix}=25$（江西中考题）

⑤$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{2013}{2014}$

⑥$\frac{x-2}{2006}+\frac{x}{2007}+\frac{x+2}{2008}=6$

⑦$\frac{2006-x}{2005}+\frac{2008-x}{2007}=\frac{2010-x}{2009}+\frac{2012-x}{2011}$

⑧ $\dfrac{1}{3+\dfrac{2}{5+\dfrac{4}{7+\dfrac{6}{x}}}}=\dfrac{11}{37}$

习　题

1. 判断正误

（1）$\pi\approx 3.14$ 是等式；

（2）代数式必须含有字母；

（3）$x+3x=5x$ 不是等式；

（4）$1+3=5$ 与 $x+3x=5x$ 都是等式，而且是同一类等式；

（5）关于 x 的方程 $ax=b$ 是一元一次方程；

（6）二元一次方程组是由二元一次方程组成的；

（7）方程 $t^2+x=3x-1+t^2$ 是二元二次方程.

2. 已知 $(m^2-9)x^2-(m-3)x+6=0$ 是以 x 为未知数的一元一次方程，如果 $|a|\leqslant|m|$，那么 $|a+m|+|a-m|$ 的值是__________.

3. 讨论关于 x 的方程 $ax=b$ 的解的情况.

4. 若关于 x 的方程 $ax=b$ 有两个不同的解，求证：该方程必有无数个解.

5. 解关于 x 的方程

（1）$ax+1=bx$

（2）$(ax-b)(a+b)=0$

（3）$m^2(1-x)=mx+1$

（4）$(k^2+2k+3)x+4=3(x+2)+k$

（5）$\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{a}{a+b}$ $(a\neq 0, a^2\neq b^2)$

（6）$\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1$（$abc=1$）

6.（1）关于x的方程$3m(x+3)=9x+4$无解，求m的值；

（2）关于x的方程$2a(3x+2)-1=(2b+1)x$有无数多个解，求a，b的值；

（3）关于x的方程$m(x-1)=2001-n(x-2)$有无数个解，求$m^{2013}+n^{2013}$的值.

7. 若关于x的方程$(3a+8b)x+7=0$无解，则ab是（　　）

A. 正数　　B. 非正数　　C.负数　　D.非负数

8. 当a取符合$na+3\neq 0$的任意数时，式子$\frac{ma-2}{na+3}$的值都是一个定值，其中$m-n=6$，求m，n的值.

9. 无论k为何值，$x=-1$总是关于x的方程$\frac{kx-a}{3}+\frac{x+bk}{4}=-\frac{1}{2}$的解，则$ab=$________.

10. 若k为整数，则使方程$(k-1999)x=2001-2000x$的解也是整数的k有________个.

11. 关于x的方程$2007x+2007a+2008b=0$（a，b为有理数，$b>0$）

有正整数解，则 ab 是（　　）

A. 负数　B. 非负数　C. 正数　D. 0

12. 解下列方程组

（1）$\begin{cases} \dfrac{x+y}{6}+\dfrac{x-y}{10}=3 \\ \dfrac{x+y}{6}-\dfrac{x-y}{10}=-1 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} \dfrac{4}{3x-2y}+\dfrac{3}{2x-5y}=10 \\ \dfrac{5}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-5y}=1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} |x-1|+|y-2|=6 \\ |x-1|=2y-4 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6} \\ 2x+3y-4z=-3 \end{cases}$

（5）$\begin{cases} 1995x+1997y=5989 \\ 1997x+1995y=5987 \end{cases}$

（6）$\begin{cases} \dfrac{pq}{p+q}=\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{qr}{q+r}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{rp}{r+p}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

（7）$\begin{cases}\dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2\\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3\\ \cdots\\ \dfrac{2x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2}=x_n\\ \dfrac{2x_n^2}{1+x_n^2}=x_1\end{cases}$　（这个题目在乘法公式中出现过）

13.（1）设 m,n 是给定的实数，已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}x+2y=5\\ mx-y=1+n\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-2y=-3\\ 2nx+y=1+m\end{cases}$ 有相同的解，求 m，n 的值.

（2）若方程组 $\begin{cases}3x-5y=2a\\ 2x+7y=a-18\end{cases}$ 的解 x，y 互为相反数，求该方程组的解.

（3）甲、乙两人解二元一次方程组 $\begin{cases}ax+5y=13 ①\\ 4x-by=-2 ②\end{cases}$，由于甲看错了方程①中的 a 而得到方程组的解为 $\begin{cases}x=-3\\ y=-1\end{cases}$，乙看错了方程②中的 b 而得到的解为 $\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$，求正确的 a，b 的值，并求出原方程组的解.

14.（1）解关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}ax+2y=1+a\\ 2x+2(a-1)y=3\end{cases}$.

（2）解关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}\dfrac{x}{a+m}+\dfrac{y}{b+m}=1\\ \dfrac{x}{a+n}+\dfrac{y}{b+n}=1\end{cases}$.

15.（1）关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2x+3y=6\\ ax+6y=12\end{cases}$，问 a 为何值时，方程组有无数多组解？a 为何值时，只有一组解？

（2）当 k，m 为哪些值时，方程组 $\begin{cases}y=kx+m\\ y=(2k-1)x+4\end{cases}$ 至少有一组解？

16. 对任意的数 a,b 关于 x,y 的二元一次方程 $(a-b)x-(a+b)y=a-b$ 都有一组公共解，求这组公共解.

17. 若 x，y，z 为实数，满足 $x+2y-5z=3$，$x-2y-z=-5$，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值是多少？

第 8 讲　一元一次不等式与一元一次不等式组（一）

主要内容

不等式的概念、性质及证明不等式的简单方法；几个基本不等式；不等式的基本性质（同解原理）;（此处不等式的基本性质与不等式的性质一样不？）一元一次不等式与不等式组的概念、解与解集，解一元一次不等式与不等式组的方法，会用数轴表示数的范围及不等式（组）的解集；作为超常班的同学，应把重点放在含参数的不等式及不等式组上，学会对参数进行分类讨论，这也是竞赛的重点和难点.

习题

1. 已知 $a>b$，求证：$b<a$.

2. a，b 是任意实数，比较 a^4+b^4 与 a^3b+ab^3 的大小.

3. 已知 a，b，c 都是正数，求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

4. 若 $-1<a<b<0$，则下列式子中正确的是（　　）

A. $-a<-b$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $|a|<|b|$　　D. $a^2>b^2$

5. 若 a，b 为实数，下列命题中正确的是（　　）

A. $a>b\Rightarrow a^2>b^2$　　B. $a\neq b\Rightarrow a^2\neq b^2$

C. $|a|>b\Rightarrow a^2>b^2$　　D. $a>b\Rightarrow a^2>b^2$

6. 已知 $a+b+c=0$，$a>b>c$，求 $\frac{c}{a}$ 的取值范围.

7. 请解释下列现象的数学原理：

（1）给糖水加一点糖，糖水就更甜了.

（2）将若干杯一样甜的糖水混合成一大杯，糖水甜度不变.

（3）将若干杯甜度互不相同的糖水混合成一大杯，糖水甜度介于原先最甜的和最不甜的之间.

8. 解不等式 $\frac{1-x}{4}>1-\frac{1-2x}{2}$，并写出它的最大整数解.

9. $\triangle ABC$ 的三条边分别是 5、9、$3a$，则 a 的取值范围是________.

10. 若 $|6x-5|=5-6x$，则 x 的取值范围是________.

11. 若 $\frac{2x-1}{3}-1\geqslant x-\frac{5-3x}{2}$，求 $|x-1|-|x+3|$ 的最大值与最小值.

12. 若方程 $3m(x+1)+1=m(3-x)-5x$ 的解是负数，求 m 的取值范围.

13. 已知方程组 $\begin{cases}3x+2y=m+1\\2x+y=m-1\end{cases}$，$m$ 为何值时，$x>y$？

14. 已知 $(3a+5b-1)^2+|a+3b+1|=0$，求关于 x 的不等式 $ax-b>\frac{x}{3}+6$ 的解集.

15. 解关于 x 的不等式：

$(2mx+3)-n<3x$

$|x-2|\leqslant 2x-10$

$|ax-1|>ax-1$

16. 如果关于 x 的不等式$(a+1)x>2a+2$ 的解集为 $x<2$，求 a 的取值范围.

17. 不等式 $(a-1)x-a^2+2>0$ 的解集为 $x<2$，求 a 的值.

18. 已知不等式 $3x-a\leqslant 0$ 的正整数解恰是 1，2，3，求 a 的取值范围.

19. 若关于 x 的不等式 $(2a-b)x+a-5b>0$ 的解集为 $x<\frac{10}{7}$，求关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集.

20. 关于 x 的方程 $5x-2m=-4-x$ 的解 x 满足 $2<x<10$，求 m 的取值范围.

21. 若方程组 $\begin{cases}4x+y=k+1\\x+4y=3\end{cases}$ 的解满足条件 $0<x+y<1$，求 k 的取值范围.

22. 已知x，y，z都不小于 0，且满足$x+3y+2z=3$，$3x+3y+z=4$，求 $3x-2y+4z$ 的最大值与最小值.

23. 已知非负数x，y，z满足$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2-y}{3}=\dfrac{z-3}{4}$，设$w=3x+4y+5z$，求$w$的最大值与最小值.

24. 若不等式组$\begin{cases}x+9<5x+1\\x>m+1\end{cases}$的解集是$x>2$，求$m$的取值范围.

25. 已知关于x的不等式组$\begin{cases}\dfrac{x+4}{3}>\dfrac{x}{2}+1\\x+a<0\end{cases}$的解集为$x<2$，求$a$的取值范围.

26. 已知关于x的不等式组$\begin{cases}x-a>0\\5-2x\geqslant -1\end{cases}$无解，求$a$的取值范围.

27. 若关于x的不等式组$\begin{cases}x-3(x-2)<2,\\\dfrac{a+2x}{4}>x\end{cases}$有解，求实数$a$的取值范围.

28. 若关于x的不等式组$\begin{cases}2x<3(x-3)+1\\\dfrac{3x+2}{4}>x+a\end{cases}$有四个整数解，求$a$的取值范围.

29. 已知不等式组$\begin{cases}x-2>a\\2x+1<b\end{cases}$的整数解只有 5、6，求 a 和 b 的取值范围.

30. 若不等式组$\begin{cases}9x-a\geqslant 0\\8x-b<0\end{cases}$的整数解仅为 1，2，3，那么适合这个不等式组的有序整数对$(a，b)$共有多少个?

31. 解关于 x 的不等式 $|x-2|+|x-3|\geqslant m$.

32. 若不等式$(m-1)x>(x-1)(m-2)$的解集是不等式$||x+3|-|x-3||>3$的解集的一部分，求 m 的取值范围.

第 9 讲　整式运算（二）幂的运算

主要内容

1. 幂的运算是整式乘除法的基础，从而也是整个整式恒等变形的基础．除了在中考中常以基础题的形式直接考察幂的运算法则外，在竞赛中常有以幂的运算法则综合运用和整体思想为主的技巧性较高的题目．

2. 熟练记住并灵活运用关于以下几个知识点的结论：同底数幂的乘除、幂的乘方、积的乘方、零指数幂、负指数幂．对于每一个结论，既能正用，又能逆用，还要会“嵌合”使用．例如，积的乘方公式逆用就是“提取公共指数”：$a^m b^m=(ab)^m$；幂的乘方公式还可以这样用来换指数：$(a^m)^n=(a^n)^m$．

3.“奇负偶正”是多种运算的重要规律，目前主要学到它在三种场合的应用：

（1）多重负号的化简，这里奇偶指的是“－”号的个数，例如：$-[-(-3)]=-3$；$-[+(-3)]=3$．

（2）有理数乘法，当多个非零因数相乘时，这里奇偶指的是负因数的个数，正负指结果中积的符号，例如：$(-3)\times(-2)\times(-6)=-36$，而$(-3)\times(-2)\times(+6)=36$．

（3）有理数乘方，这里奇、偶指的是指数，当底数为负数时，指数为奇数，则幂为负；指数为偶数，则幂为正，例如：$(-3)^2=9$ $(-3)^3=-27$．

特别地：当 n 为奇数时，$(-a)^n=-a^n$；当 n 为偶数时，$(-a)^n=a^n$．

负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数．

正数的任何次幂都是正数，1 的任何次幂都是 1，任何不为 0 的数的 0 次幂都是 1.

4. 熟练使用幂的运算法则求解一些底数或指数中含有未知数的问题（对于整数解问题，常要用到数论知识）；对于涉及幂的运算的求值问题，主要用到整体思想和公式的嵌合使用.

5. 比较大小是难点，灵活运用下列方法：（1）直接计算法；（2）化同底数，比较指数；（3）化同指数，比较底数；（4）放缩法（利用不等式的传递性）；（5）作差法；（6）作商法；（7）换元法；（8）找规律；（9）对于选择题常用特殊值法.

习题

1. 判断题

（1）乘方实质上是一种乘法运算.

（2）在式子 a^n 中，n 叫做幂.

（3）a^n 读作 a 的 n 次方，又读作 a 的 n 次幂.

（4）$\frac{2^2}{3}=\frac{4}{9}$.

（5）$-3^3=(-3)^3$.

（6）$a^m\cdot a^n=a^{mn}$.

（7）$(ab)^{mn}=a^m b^n$.

（8）$a^2+a^3=a^5$.

（9）一个数的 0 次方一定是 1.

2. 求证：

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n都是正整数）

（2）$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m、n都是正整数，且$m > n$）

（3）$(a^m)^n = a^{mn}$（m，n都是正整数）

（4）$(ab)^m = a^m b^m$（m是正整数）

3. 运用幂的运算法则解下列各题：

（1）化简：$10^{2014} \cdot (-10)^{2n-2012}$.

（2）化简：$(3x-y)^5 (y-3x)^2 (-y+3x)^3$.

（3）化简：$[(-a)^3]^4 =$________；$2^a \cdot 2^b \cdot 5^{a+b} =$________.

（4）化简：$(-5x^2y^3)^4 =$______________；$[-(-xy^2)^3]^4 =$____________________；

$(-\cdots-(-(-(-(-a)^1)^2)^3)^4\cdots)^{99} =$______________.

（5）化简：$[(a^2)^6 \div (a^4 b)]^{3+\{[-(-\pi)^{2013}]^0\}^{2014}} \cdot (a^{-3}b^3)^4$.

4. 计算：

（1）$0.125^6 \times 2^6 \times 4^6$.

（2）$0.25^5 \times 2^{10}$.

（3）$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2014} \times 25^{1007} \times (1.5)^{2013} \times (-1)^{2013} \times (-0.2)^{2014} \times 2014^0$.

（4）$(-2)^{2013} + (-2)^{2014}$.

（5）$(-2)^{2014} + 3 \times (-2)^{2013}$.

（6）$(-2)^{2n+1} + 2 \cdot (-2)^{2n}$（$n$是正整数）.

（7）$(\dfrac{7}{3})^{2012} \times \dfrac{3^{2014} + 15^{2014}}{7^{2014} + 35^{2014}}$.

（8）$2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - 2^8 - 2^9 + 2^{10}$.

5. 解下列各题：

（1）若 $3\times 9^m\times 27^m=3^{11}$，求 m 的值.

（2）若 $3^{3x+1}\cdot 5^{3x+1}=15^{8x-9}$，求 x 的值.

（3）若 $2^{2x+3}-2^{2x+1}=192$，求 x 的值.

（4）若 $\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\times\dfrac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=2^n$，求 n 的值.

（5）若整数 n 满足 $(n^2-n-1)^{n+2}=1$，求 n 的值.

（6）若对于自然数 x、y 有 $\dfrac{10^{2x}\cdot 10^{3y}}{10^{-7}}-1=\underbrace{99\cdots 9}_{19个9}$，求满足条件的数对（$x$，$y$）.

（7）若 $x^2=\underbrace{44\cdots 4}_{2014个4}6\underbrace{22\cdots 2}_{2014个2}4$，求 x 的值.

（8）是否存在整数 a、b、c，满足 $(\dfrac{9}{8})^a\cdot(\dfrac{10}{9})^b\cdot(\dfrac{16}{15})^c=2$？若存在，求出 a、b、c 的值；若不存在，说明理由.

（9）求满足方程 $y^x=x^{50}$ 的所有正整数对（x，y）.

6. 解下列各题：

（1）已知 $a^m=3$，$a^n=2$，m、n 是正整数且 $m>n$. 求下列各式的值：①a^{m+1}；②$2a^{6m}-1$；③a^{3m-2n}.

（2）①若 $2^a=3$，$2^b=6$，$2^c=12$，则 a，b，c 应满足的关系为（　　）

A. $2b<a+c$　　B. $2b=a+c$　　C. $2b>a+c$　　D. $a+b=c$

②若 $x=2^{n+1}+2^{n}$ ，$y=2^{n-1}+2^{n-2}$ ，其中 n 为整数，则 x 与 y 的数量关系为（　　）

A. $x=4y$　　B. $y=4x$　　C. $x=12y$　　D. $y=12x$

（3）若 $2x+5y-3=0$ ，求：①$4^{x}\cdot 32^{y}$ 的值；②$16^{x}+32^{2y}$ 的最小值.

（4）若 a 、b 、c 均为不等于 1 的正数，且 $a^{-2}=b^{3}=c^{6}$ ，求 abc 的值.

（5）①已知 $25^{x}=2000$ ，$80^{y}=2000$ ，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的值；

②已知 $6^{a}=2010$ ，$335^{b}=2010$ ，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值；

③已知 $2^{a}\cdot 5^{b}=2^{c}\cdot 5^{d}=10$ ，求证：$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$.

（6）设 a 、b 、c 、d 都是自然数，且 $a^{5}=b^{4}$ ，$c^{3}=d^{2}$ ，$a-c=17$ ，求 $d-b$ 的值.

7. 解下列各题：

（1）比较大小：

①$(-2)^{4}$ _____ $(-4)^{2}$ ；②-5^{3} _____ $(-3)^{5}$ ；③$m^{2}+1$ ____ 0（m 为有理数）；

④a^{4} ____ a^{5}（$a<0$）；⑤x^{9} _____ x^{10}（ $0<x<1$ ）.

（2）比较大小：$a=-0.4^{2}$ ，$b=-4^{-2}$ ，$c=(-\frac{1}{4})^{-2}$ ，$d=(-\frac{1}{4})^{0}$.

（3）①比较 2^{55} ，3^{44} ，5^{33} ，6^{22} 这 4 个数的大小关系；②求满足 $(x-1)^{200}>3^{300}$ 的最小正整数 x .

（4）已知 $a=81^{31}$ ，$b=27^{41}$ ，$c=9^{61}$ ，比较 a ，b ，c 的大小关系.

（5）比较大小：①$15^{16}$ _______ 33^{13} ；②$(-2)^{234}$ ____ 5^{100} .

（6）已知 $M=6^{2012}+7^{2014}$ ，$N=6^{2014}+7^{2012}$ ，比较 M 、N 的大小关系.

（7）已知 $P=\dfrac{99^9}{9^{99}}$，$Q=\dfrac{11^9}{9^{90}}$，比较 P、Q 的大小关系.

（8）已知 $a=2014+2013\times2014+2013\times2014^2+\cdots+2013\times2014^{2012}+2013\times2014^{2013}$，$b=2014^{2014}$．比较 a 与 b 的大小.

（9）已知 $A=\dfrac{3^{2012}+1}{3^{2013}+1}$，$B=\dfrac{3^{2013}+1}{3^{2014}+1}$，比较 A 与 B 的大小关系.

（10）你能比较两个数 2013^{2014} 和 2014^{2013} 的大小吗?

为了解决这个问题，我们先写出它的一般形式，即比较 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小（n 是大于或等于 1 的自然数），然后，我们分析 $n=1$，$n=2$，$n=3$，$\cdots$ 从中发现规律，经归纳、猜想得出结论.

1）通过计算，比较下列各组中两个数的大小(在空格中填入“>”、“=”、“<”号)

①$1^2$____2^1；②$2^3$____3^2；③$3^4$____4^3；④$4^5$____5^4；⑤$5^6$____$6^5\cdots$

2）从第 1）题的结果经过归纳，可以猜想出 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小关系是________；

3）根据上面归纳猜想得到的一般结论，试比较下列两个数的大小：2013^{2014}____2014^{2013}.

8. 探索与高次方有关的“尾数”问题，是件非常有趣的事：

（1）2^{2014} 的个位数字是____；3^{2014} 的个位数字是_____；5^{2014} 的个位数字是_____；1999^{2014} 的个位数字是_____；2014^{2014} 的个位数字是_____.

（2）$7^7\cdot7^7\cdot7^7$ 的个位数字是_____；$((7^7)^7)^7$ 的个位数字是_____；7^{7^7} 的个位数字是_____.

（3）试确定 $(2^1+1)(2^2+1)(2^3+1)\cdots(2^{2014}+1)$ 的末两位数字.

（4）求 $2012^{2013^{2014}}$ 的末三位数字.

第 10 讲　整式运算（三）整式的乘除法

主要内容

1. 整式乘除以幂的运算法则为基础. 只有掌握了幂的运算，才能进行单项式之间的乘除；有了单项式与单项式乘除的运算法则，则单项式与多项式、多项式与多项式相乘，多项式除以单项式就可以转化为单项式之间的乘除与合并同类项的混合运算.

2. 要学会借助几何方法理解整式乘法运算法则. 我们通过对同一面积的不同表达和比较可得到许多运算法则（也包括下讲将要学到的乘法公式），这是数形结合和“算两次”思想的重要体现，许多中考题和竞赛题会对这两种数学思想进行灵活的考察.

3. 多项式除以多项式，建议采用竖式法. 一方面能类比小学学习的数的除法运算，另一方面也需注意与数的运算的区别. 比如数的除法要求余数小于除数，而多项式的除法要求余式的次数小于除式的次数，而对二者大小没有要求.

4. 两个多项式相等的条件是合并同类项之后，对应项系数相等，这是待定系数法的原理. 我们常用这个方法求解与多项式运算有关的参数确定问题.

5. 想要参加竞赛的同学，必须深刻理解余数定理、因式定理. 学会找一个多项式有理根的方法，并通过确定有理根寻找多项式的一次因式. 因式定理常与待定系数法联合使用求解涉及多项式除法或整除问题的综合题.

习题

1. 判断：

（1）π是有理式.

（2）$\dfrac{x+y}{2}$是单项式.

（3）单项式之积不可能是多项式.

（4）单项式必须是同类项才能相乘.

（5）几个单项式相乘，积为 0，则每一个因式都是 0.

（6）多项式 A 是一个三项式，B 是一个四项式，则多项式 $A\times B$ 的项数一定不多于 7 项.

2. 计算：

（1）$\dfrac{1}{2}a^2bc^3\cdot(-2a^2b^3)^3=$______.

（2）$\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)(6x^3-4yx-1)=$______.

（3）$(-2x+\dfrac{3}{2}y)^2=$______.

（4）$(x^2-2x-3)(1-x+x^2)=$______.

（5）$x^4y^7\cdot\left(-\dfrac{1}{4}x^3y\right)\div(-3y^3)^2=$______.

（6）$(\dfrac{3}{5}mn^3-m^2n^2-\dfrac{2}{3}n^2)\div\dfrac{2}{3}n^2=$______.

（7）$[(x+y)^{2n}]^3\div(-x-y)^{2n+1}=$______.

（8）$(2x+1)\div(3x-2)\times(6x-4)\div(4x+2)=$______.

3. 计算下列多项式除以多项式的商式和余式：

（1）$(2x+1)\div(x-1)$

（2）$(2x^3-x^2+\frac{1}{2})\div(2x+1)$

（3）$\left(x^4-x^3y-7x^2y^2+13xy^3-6y^4+1\right)\div\left(x-y\right)$

（4）$\left(x^4+2x^3-9x^2-2x+9\right)\div\left(x^2-1\right)$

（5）$(x^3-1)\div(x-1)$

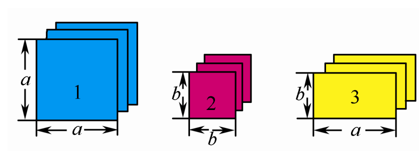
（6）$(3x^4-5x^3+x^2+2)\div(x^2+3)$

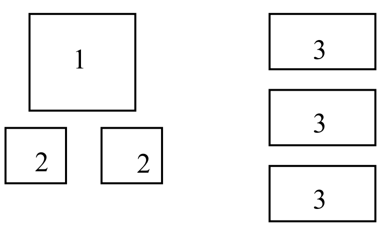
（7）$(x^n-1)\div(x-1)$

4. 解下列各题：

（1）有足够多的长方形和正方形卡片，如下图：

① 如果选取 1 号、2 号、3 号卡片分别为 1 张、2 张、3 张，可拼成一个长方形(不重叠无缝隙)，请画出这个长方形的草图，并运用拼图前后面积之间的关系说明这个长方形的代数意义.





____

这个长方形的代数意义是______________.

②小明想用类似方法解释多项式乘法 $(a+3b)(2a+b)=2a^2+7ab+3b^2$，那么需用 2 号卡片_____张，3 号卡片______张.

（2）计算下列各图中所要求的长方形的面积和：（对应线段的长度

如图）

①图 1 所有长方形面积和：______________；

②图 2 所有长方形面积和：______________；

③图 3 所有含阴影的长方形面积和：__________.

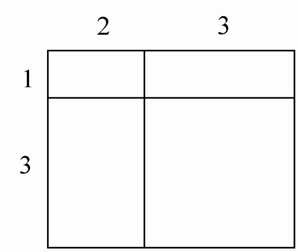


图 1

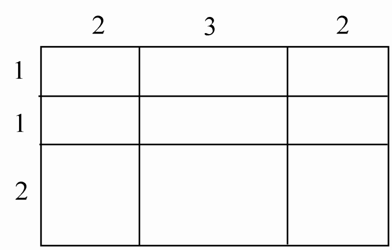


图 2

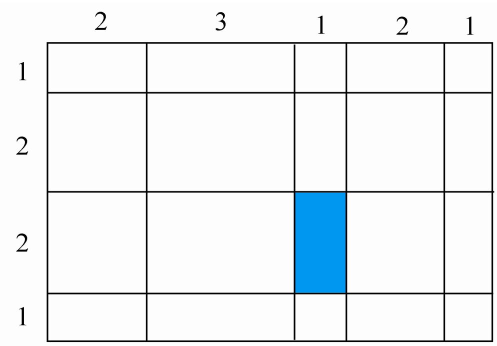


图 3

5. 解下列各题：

（1）已知 $(2x+3)(4-5x)=ax^2-bx+c$，求 $a=$________，$b=$________，$c=$____________.

（2）已知 $6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a=(2x-3y+b)(3x+y+c)$，求 $a=$_________，$b=$_________，$c=$_________.

（3）已知 $(x+a)(x+b)=x^2+nx-12$，式中 a、b 为整数，使此式成立的

n 的值共有______个.

（4）已知 $(x^2+px+8)(x^2-3x+q)$ 的积中不含 x^2 和 x^3，求 p、q 的值.

（5）已知多项式 x^3-2x^2+ax-1 的除式为 $bx-1$，商式为 x^2-x+2，余式为 1，求 a、b 的值.

（6）已知 x^2-3x+m 为 $5x^3-9x^2+nx-12$ 的因式，求 $m=$_________，$n=$_________.

（7）已知多项式 x^3+ax^2+1 能被 $x-1$ 整除，求 a 的值.

（8）已知 $x^4+mx^3+nx-16$ 有因式 $(x-1)$ 和 $(x-2)$，求 m、n 的值.

（9）已知多项式 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除，求 $\frac{a}{b}$ 的值.

（10）已知 a，b，c 为实数，且多项式 x^3+ax^2+bx+c 能被 x^2+3x-4 整除，

① 求 $4a+c$ 的值；

② 求 $2a-2b-c$ 的值；

③ 已知 a，b，c 为整数，且 $c \geqslant a > 1$，求 a，b，c 的值.

（11）①当 x 为何值时，多项式 $2x+1$ 能被 $x-1$ 整除？

②第 3 题第（1）小题可解得无论 x 为何值，多项式 $2x+1$ 被 $x-1$ 除的余式都是 3，这是否与本题第①问当 x 取某些值时，多项式 $2x+1$ 能被 $x-1$ 整除矛盾？为什么？

6. 解下列各题：

（1）证明余数定理：关于 x 的多项式 $f(x)$，被一次多项式 $x-a$ 所除，

余数是 $f(a)$.

（2）证明因式定理：若 $x-a$ 是多项式 $f(x)$ 的一次因式，则 $f(a)=0$.

（3）若 $x=a$ 时 $f(x)=0$，即 $f(a)=0$，则称 a 为多项式 $f(x)$ 的根. 试通过整除分析法给出寻找关于 x 的整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的有理根的方法.（注：这是个非常重要的方法，由因式定理知这也是寻找多项式一次因式的方法）

（4）求多项式 $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$ 的有理根.（注：也就是方程 $x^3+6x^2+11x+6=0$ 的根）

（5）多项式 $f(x)$ 除以 $x-1$，$x-2$ 所得的余数分别为 3 和 5，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 所得的余式.

（6）多项式 $f(x)$ 除以 $x-1$，$x-2$，$x-3$ 所得的余数分别为 1，2，3，试求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 所得的余式.

（7）已知 $f(x)=x^3+2x^2+3x+2$ 除以整数系数多项式 $g(x)$ 所得的商式及余式均为 $h(x)$，试求 $g(x)$ 和 $h(x)$，其中 $h(x)$ 不是常数.

（8）已知关于 x 的三次多项式 $f(x)$ 除以 x^2-1 时，余式是 $2x-5$；除以 x^2-4 时，余式是 $-3x+4$，求这个三次多项式.

（9）设 $f(x)=x^2+mx+n$（m，n 都是整数）既是多项式 x^4+6x^2+25 的因子，又是多项式 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的因子，求 $f(x)$.

第11讲　整式运算（四）乘法公式

主要内容

1. 熟练掌握下述公式:

基本乘法公式:

平方差公式: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

立方和与立方差公式: $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

拓展公式:

三元的完全平方公式: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

完全立方公式: $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

2. 对于上述公式，除了会熟练推导之外，也要会用几何的方法解释平方差公式与完全平方公式，体会这种利用数形结合思想解决问题的思路.

3. 灵活运用上述公式进行代数式的变形与求值.灵活使用的前提是细致琢磨公式的结构，明确公式中的字母既可以代表一个数，还可以代表一个式子（整体思想）；既能正用，也能逆用，还能变形重组嵌套使用.

4. 掌握配方法，并会运用完全平方式的有界性解决一些简单的最

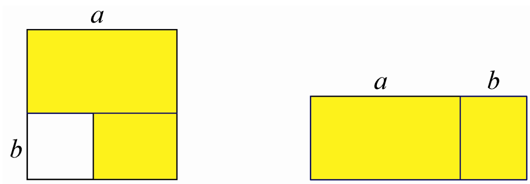
值问题.

5. 会运用乘法公式解决一些简单的数论问题.

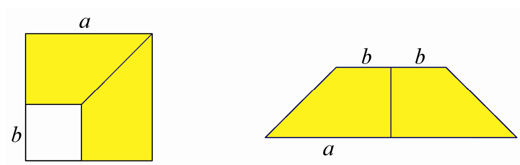
习　题

一、回答下列问题

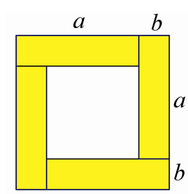
1. 如图，从边长为 a 的正方形内去掉一个边长为 b 的小正方形（$a>b$），然后将剩余部分拼成一个长方形，上述操作所能验证的公式是________.



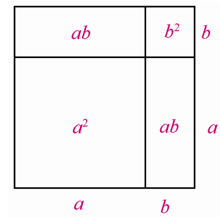
2. 如图，在边长为 a 的正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形（$a>b$），把剩下的部分拼成一个梯形，分别计算这两个图形的面积，验证了公式____________.



3. 如图，四张全等的矩形纸片拼成的图形，请利用图中空白部分面积的不同表示方法，写出一个关于 a、b 的恒等式________.



4. 如图所示的几何图形可以表示的公式是____________.



二、化简下列式子

1. $(4a+2b)(4a-2b)$.　　2. $(-5x+y)(5x+y)$.

3. $\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\left(\frac{1}{4}y-\frac{1}{3}x\right)$.　　4. $(-5xy-2)(-5xy+2)$.

5. $(-3m+4n)^2$.　　6. $(x-\frac{1}{x})^2$.

7. $(2m+n^2)(4m^2-2mn^2+n^4)$.　8. $(3x^2-2y)(9x^4+6x^2y+4y^2)$.

9. $(x^m+x^n)(x^{2m}-x^{mn}+x^{2n})$.　10. $(a-b^m)^3$.　11. $(a-b^2+c^3)^2$.

三、填空

1. 若 $a^2-9=(a-b)(a+b)$，则 $b=$__________.

2. 若 $(x-ay)(x+ay)=x^2-4y^2$，则 $a=$________.

3. $a^2+b^2=(a+b)^2+$______$=(a-b)^2+$____；　$(a+b)^2+(a-b)^2=$______；$(a+b)^2-(a-b)^2=$______.

4. $(x+3y)(x^2-$____$+9y^2)=x^3+27y^3$.

5. $(m+2n)($____$-2mn+$____$)=m^3+8n^3$.

6. $\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{6}ab+\frac{1}{4}bc+\frac{1}{3}ca=($______$+$______$+$______$)^2$.

7. $4m^2+n^2+16p^2-4mn-8np+16pm=($________________$)^2$.

四、化简下列式子

1. $(x+2)^2(x-2)^2$.

2. $(x+5y-9)(x-5y+9)$.

3. $(2x-y+2)(y-2x+2)$.

4. $(y+2)(y-2)-(y-1)(y+5)$.

5. $(x-y)^2-(x+y)(x-y)$.

6. $(x+2y)^2\cdot(x^2-2xy+4y^2)^2$.

7. $(2a+b)^2\left[4a^2-(2a-b)b\right]^2$.

8. $(a+2b)(a-2b)(a^4-8a^2b^2+16b^4)$.

9. $(a-\frac{1}{3})(a+\frac{1}{3})(a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{9})(a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{9})$.

五、运用乘法公式计算或回答问题

1. 计算：59.8×60.2.

2. 计算：$1\frac{1}{15}\times\frac{14}{15}$.

3. 快速判断 3599 是质数还是合数.

4. 计算：$20142014^2-20142013\times20142015$.

5. 计算：

$1949^2-1950^2+1951^2-1952^2+1953^2-1954^2+\cdots+2013^2-2014^2$.

6. 计算：$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)$（结果可保留幂的形式，下同）.

7. 计算：$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right)\left(1+\frac{1}{256}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$.

8. 计算：$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$.

9. 计算：$3\times5\times17\times.....\times(2^{2^{n-1}}+1)$.

10. 计算：$1.2345^2+0.7655^2+2.469\times0.7655$.

11. 计算：$\dfrac{20142013^2}{20142012^2+20142014^2-2}$.

12. 比较大小：$a=\dfrac{2011\times2013}{2012}$，$b=\dfrac{2012\times2014}{2013}$，$c=\dfrac{2013\times2015}{2014}$.

13. 比较大小：

$a=\dfrac{2010^2+2011^2}{2009^2+2012^2}$，$b=\dfrac{2011^2+2012^2}{2010^2+2013^2}$，$c=\dfrac{2012^2+2013^2}{2011^2+2014^2}$.

***14.** 计算：$\dfrac{(7^4+64)(15^4+64)(23^4+64)(31^4+64)(39^4+64)}{(3^4+64)(11^4+64)(19^4+64)(27^4+64)(35^4+64)}$.

六、完成下列问题

1. 如果 $(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$，那么 $a+b$ 的值是________.

2. 若 $a-b=2$，$ab=3$，则 $a^2+b^2=$____；$a^4+b^4=$____；$a^3-b^3=$______.

【巩固】

（1）已知 $a+b=3$，$a^2b+ab^2=-30$，则 $a^2-ab+b^2+11=$__________.

（2）已知实数 a、b 满足 $(a+b)^2=1$，$(a-b)^2=25$，求 a^2+b^2+ab 的值.

（3）若 $a+b=5$，求 a^3+b^3+15ab 的值.

3. 若 $(2014-a)(2012-a)=2013$，则 $(2014-a)^2+(2012-a)^2=$________.

4. 若 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$，则 $x^3+y^3=$___________；$x^4+y^4=$___________；$x^5+y^5=$__________；$x^6+y^6=$__________；$x^7+y^7=$_______.

【巩固】

（1）已知 $x+y=1$，$x^3+y^3=\frac{1}{3}$，求 x^5+y^5 的值.

（2）若 $x+y=a+b$，且 $x^2+y^2=a^2+b^2$，求证：$x^{2013}+y^{2013}=a^{2013}+b^{2013}$.

5. a、b、c 不全为 0，满足 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$，称使得 $a^n+b^n+c^n=0$ 恒成立的正整数 n 为“平行线数”，则不超过 2014 的正整数中“平行线数”的个数为________.

6. 若 $x^2-3x+1=0$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=$__________；$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=$__________；$x^3+\frac{1}{x^3}=$__________；$x^4+\frac{1}{x^4}=$__________；$x^5+\frac{1}{x^5}=$__________.

【巩固】

（1）若 $a+\frac{1}{a}=5$，则 $\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=$________.

（2）若 $\frac{x}{x^2+x+1}=a$ 且 $a\neq 0$，则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$________.

7. 已知 $a=\frac{1}{20}x+20$，$b=\frac{1}{20}x+19$，$c=\frac{1}{20}x+21$，则代数式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=$__________.

8. 若△ABC 的三边 a，b，c 满足 $a^2+b^2+c^2=ac+bc+ab$，则△ABC 是________三角形.

9. 已知 $a-b=b-c=\frac{3}{5}$，$a^2+b^2+c^2=1$，求 $ab+bc+ca$ 的值.

10. 已知三个数 a，b，c 满足方程

$$\begin{cases} b^2+2ac=14 \\ c^2+2ab=29 \\ a^2+2bc=21 \end{cases}，求 a+b+c.$$

11. 若 $x+y+z=3a$（$a\neq 0$，且 x，y，z 不全相等），求 $\dfrac{(x-a)(y-a)+(y-a)(z-a)+(z-a)(x-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}$ 的值.

12. 如果 a、b、c 满足 $\begin{cases} a+b+c=3 \\ ab+bc+ca=-10 \\ abc=-24 \end{cases}$，则 $a^3+b^3+c^3=$________.

13. x，y，z 为有理数且满足 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2+(x+y-2z)^2$，求 $\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值.

14. 已知 a，b，c 为有理数，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$a(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})+b(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a})+c(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})=-3$，求 $a+b+c$ 值.

15. 若 a、b、c 满足 $abc\neq 0$，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$，求 $a^4+b^4+c^4-abc$ 的值.

16. 把一个棱长均为整数的长方体的表面都涂上红色，然后切割成棱长为 1 的小立方块，其中，两面有红色的小立方块有 40 块，一面有红色的小立方块有 66 块，那么这个长方体的体积是多少?

七、解答下列题目

1.（1）若 $a^2-ka+81$ 是完全平方式，则 $k=$____________；

（2）若 $x^2-12x+k$ 是完全平方式，则 $k=$____________；

（3）若 $x^2-mx+\dfrac{9}{4}$ 是完全平方式，则 $m=$____________；

（4）若整式 $4x^2+Q+1$ 是完全平方式，请你写一个满足条件的单项式

Q：________.

2. 若 $(x+y)^2-2x-2y+1=0$，则 $(x+y)^{999}=$________.

3.（1）若 a,b 为有理数，且 $2a^2-2ab+b^2+4a+4=0$，则 a^2b+ab^2 =________.

（2）若 a，b 为有理数，且 $a^2-2ab+2b^2+4a+8=0$，则 $ab=$________.

（3）已知 a、b、c 满足 $a^2+2b=7$，$b^2-2c=-1$，$c^2-6a=-17$，则 $a+b+c$ 的值等于__________.

4. 解关于 x_1，x_2，…，x_n 的方程组.

$$\begin{cases}\dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2\\ \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3\\ \quad\vdots\\ \dfrac{2x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2}=x_n\\ \dfrac{2x_n^2}{1+x_n^2}=x_1\end{cases}$$

5. 求下列式子的最值：

（1）当 x 为何值时，x^2-4x+8 有最小值，并求出该最小值；

（2）当 x 为何值时，$-x^2+6x-15$ 有最大值，并求出该最大值.

6. 求 $a^2+4b^2-2a-4b+3$ 的最小值.

7.（1）求证：当 a、b 为任意实数时，$a^2+b^2-2a+6b+11$ 恒为正数；

（2）请说明 $a^2+b^2-2a+6b+11$ 是否有最小值？如果有，说明当 a、b

取何值时，式子取得最小值.

8. （1）若 $xy=1$，则 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4y^2}$ 的最小值为______；

（2）如果 a、b、c、d 为四个乘积为 1 的正数，则代数式 $a^4+b^4+c^4+d^4-a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-c^2d^2$ 的最小值为______.

八、解答下列题目

1. （1）在 2011、2012、2013、2014 这四个数中，不能表示为两个整数平方差的是____________；

（2）请写出 2013 表示成两个正整数平方差的所有情况；

（3）若一个正整数能写成两个正整数的平方差，则把该正整数称为“平行线数”，例如 $16=5^2-3^2$，则称 16 是一个“平行线数”．问：①1 至 2014 这些正整数中，有多少个“平行线数”？②999 是第几个“平行线数”？③1 至 2014 这些正整数中，所有“平行线数”之和是多少?

2. 某校举行春季运动会时，由若干名同学组成一个 8 列的长方形队列，如果原队列中增加 120 人，就能组成一个正方形队列；如果原队列中减少 120 人，也能组成一个正方形队列．问原长方形队列有多少名同学?

3. 数列：101，10101，1010101，…中有多少个质数?

4. （1）求证：一个完全平方数被 4 除的余数只能是 0 或 1；

（2）形如 $1\underbrace{44\cdots4}_{n个4}$ 的数中，有几个完全平方数?

5. 一个六位数，它是一个完全平方数，且末三位数字都是 4，这样的六位数有______个.

6. 求所有的素数 p，使得 $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ 为完全平方数.

九、解答下列题目

1. 观察下列算式：

① $1\times3-2^2=3-4=-1$；

② $2\times4-3^2=8-9=-1$；

③ $3\times5-4^2=15-16=-1$；

④ ____________________；

……

（1）请你按以上规律写出第 4 个算式；

（2）把这个规律用含字母的式子表示出来；

（3）你认为（2）中所写的式子一定成立吗？请说明理由.

2. 老师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$，平平接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22$……

（1）请你写出两个具有上述规律的算式；

（2）用文字叙述上述算式反映的规律；

（3）证明这个规律的正确性.

3. 观察：$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=5^2$；$2\cdot3\cdot4\cdot5+1=11^2$；$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=19^2$；……

（1）请写出一个具有普遍性的结论，并给出证明；

（2）根据（1），计算 $2011\cdot2012\cdot2013\cdot2014+1$ 的结果（用一个最简的式子表示）.

4.（1）推导 $(a+b+c)^2$、$(a+b+c+d)^2$ 的公式，比较 $(a+b)^2$、$(a+b+c)^2$、$(a+b+c+d)^2$ 的公式，并探索规律；

（2）利用（1）得出的规律推导 $(a+b+c-d)^2$、$(a+b-c-d)^2$、$(a+b+c+d+e)^2$ 的展开式.

5.（1）推导 $(a+b)^3$、$(a+b)^4$ 的公式，比较 $(a+b)^2$、$(a+b)^3$、$(a+b)^4$，并探索规律；

（2）根据（1）得到的规律写出 $(a-b)^7$ 的展开式.

第 12 讲　因式分解（一）
——有理数范围的因式分解

主要内容

本讲的核心知识点是因式分解的方法:

1. 四种基本方法：提公因式法；公式法；分组分解法；十字相乘法.

2. 常用技巧：换元法、赋值法、主元法、待定系数法、配方法、拆添项法、常数代换法、对称法、构造法、求根公式法、三次单位根法等.

本讲参考单墫教授的《因式分解技巧》（华东师范大学出版社）.

习题

一、解下列各题

1. $\frac{3}{4}a^{3n-1}+\frac{1}{6}a^{2n-1}$（$n$ 是正整数）

2. $3a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^2(x+y)(b+c)^2$

3. $6p(x-1)^3-8p^2(x-1)^2-2p(1-x)^2$

小结：① 因式分解第一步就是先观察有无公因式可提，若有则立即提净；② 公因式可以是数，也可以是代数式（整体思想）；原则上说，

提公因式后，括号中的多项式应为整数系数；③ 在与其他方法配合时，即使开始时公因式已经提净，但经分组或应用公式后可能会产生新的公因式，则应再次提净公因式.

二、解下列各题

1. $75x^6y-12x^2y^5$

2. a^4-b^4

3. $-(3a^2-5b^2)^2+(5a^2-3b^2)^2$

4. $-81a^4b^4+16c^4$

5. $9x^2-24xy+16y^2$

6. $12a-6a^2-6$

7. $a^{n+2}+8a^n+16a^{n-2}$

8. $x^2(a+b)^2-2xy(a^2-b^2)+y^2(a-b)^2$

9. $4a^2b^2-(a^2+b^2)^2$

10. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

11. $4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab$

12. $9a^2+x^{2n}+6a+2x^n+6ax^n+1$

13. $8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$

14. $729a^6-243a^4+27a^2-1$

15. $(p+q)^3-3(p+q)^2(p-q)+3(p+q)(p-q)^2-(p-q)^3$

16. $8a^3b^3-1$

17. $32a^3b^3-4b^9$

18. a^6+b^6

19. a^6-b^6

20. x^5-1

小结：① 熟练掌握下列公式：平方差公式、完全平方公式（二元、三元）、完全立方公式、立方和与立方差公式、a^n-b^n 的分解；② 与其他方法配合时，常会产生多次使用公式的机会.

三、解下列各题

1. $x^3-2x^2-x+2+x^5-2x^4$

2. $x^4+x^3+2x^2+x+1$

3. $x^3+x^2-y^3-y^2$

4. $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$

5. $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+a^3+b^3+c^3$

小结：①分组分解法常用于分解某些多于 3 项的多项式，分组的目的一般是为了凑出公因式或创造使用乘法公式的机会；②如果分组的目的是为了提公因式，则必须平均分组；若是为了使用公式，则可以不平均分组；因此想要顺利使用分组分解法，则需具备观察两步以上的能力，否则只能靠尝试.

四、解下列各题

1. x^4-4x+3

2. $a^4+a^2b^2+b^4$

3. x^8+x^4+1

4. $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

小结：①拆项和添项是为了创造分组分解的机会（接下来是提公因式或使用公式）；②对于按某一字母降幂排列的三项式，常要拆中项；③配完全平方时，常需添上一个适当的项（借来还去）.

五、解下列各题

1. x^2-6x+5

2. x^2-x-6

3. $6x^2-7x+2$

4. $1-6y+5y^2$

5. $1-y-6y^2$

6. $6-7y+2y^2$

7. $x^2-6xy+5y^2$

8. $x^2-xy-6y^2$

9. $6x^2-7xy+2y^2$

10. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc$

11. $x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2$

12. $x^2+(a+b+c)x+(a+b)c$

小结：①对于二次三项式，常考虑十字相乘法分解因式，竖分常数（二次项系数，常数项），横写因式，交叉验证．②一元二次三项式与二元二次三项齐次式具有某种对应性，同学们可仔细体会上面 9 道题．

六、分解因式或回答问题

1. $x^2+2xy-3y^2+3x+y+2$

2. $x^2-6xy+9y^2-5xz+15yz+6z^2$

3. $x^2-y^2+5x+3y+4$

4. $x^2+3xy+2y^2+2x+4y$

5. $2x^2-6y^2+3z^2-xy+7xz+7yz$

6. $4x^2-9y^2+2z^2+6xz-3yz$

7. $4x^2+2z^2+xy+9xz+2yz$

8. m 为什么数时，$x^2+7xy-18y^2-5x+my-24$ 可以分解为两个一次因式的积?

9. 已知：a、b、c 为三角形的三条边，且 $a^2+4ac+3c^2-3ab-7bc+2b^2=0$．求证：$2b=a+c$．

小结：部分二元二次式（或三元齐次式）可用长十字相乘（双十字相乘）进行分解，若能把三个十字相乘拼成一个整体，就可以采用这种方法，这是“化整为零”与“化零为整”在数学中的集中体现。不是所有的二元二次式（或三元齐次式）都可以用长十字相乘分解，因为多数情况下三个十字相乘无法拼成一个整体.

七、分解因式

1. x^6-28x^3+27

2. $x^6-19x^3y^3-216y^6$

3. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$

4. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

5. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

6. $(x^2+6x+8)(x^2+14x+48)+12$

7. $a^4+4^4+(a-4)^4$

小结：上述题目考察“换元法”。在代数式变形中，若一个代数式中某个“结构”作为一个整体反复出现，或算式中其他部分可以用这个“结构”表示，则常用一个字母来代换这个结构，这样可以起到给代数式“瘦身”的作用，容易暴露出问题的本质.

八、分解因式

1. $a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-3abc+b^2c+bc^2$

2. $y(y+1)(x^2+1)+x(2y^2+2y+1)$

3. $ab(x^2-y^2)-(a^2-b^2)(xy+1)-(a^2+b^2)(x+y)$

4. $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

小结：上述题目考察“主元法”。某些代数式，可以选择其中某一两个字母为“主元”，其余字母为“辅助元”，这样分清主次后便于选择后续的方法，甚至有时还可以“反客为主”，这常见于某些含参数方程的解的讨论.

九、分解因式：若在有理数范围内不能分解，请说明理由

1. $x^3-9x^2+26x-24$

2. $x^3-9x^2y+26xy^2-24y^3$

3. $-24y^3+26y^2-9y+1$

4. $x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{11}{3}x-1$

5. $(a-1)x^3-ax^2-(a-3)x+a-2$

6. $(l+m)x^3+(3l+2m-n)x^2+(2l-m-3n)x-2(m+n)$

7. $8x^3+4(a+b+c)x^2+2(ab+bc+ca)x+abc$

8. $x^4+x^3+2x^2-x+3$

9. x^4-x^2+1（本题如果在有理数范围内不可分解，就在实数范围内分解）

小结：

1. 我们在前面《整式乘除》中已经讲过求多项式有理根的方法；

2. 如果某多项式有有理根，则在有理数范围内存在一次因式，从而可进行分解；

3. 熟记两种特殊情况：（1）若某多项式的系数和为 0，则 1 是其有理根；（2）若某多项式的奇次项系数和等于偶次项系数和，则 -1 是其有理根；

4. 如果某多项式没有有理根，则在有理数范围内不存在一次因式，可采用待定系数法进一步判定能否分解；

5. 对于二元齐次多项式，其分解可以与一元多项式对应.

十、分解因式

1. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

2. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

4. $(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3-3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

5. $(b-c)^3(b+c-2a)+(c-a)^3(c+a-2b)+(a-b)^3(a+b-2c)$

6. $x^3(y^6-z^6)+y^3(z^6-x^6)+z^3(x^6-y^6)$

7. $(a+b)^5-a^5-b^5$

8. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

9. $(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz)+(z^2-x^2)(1+yz)(1+yx)+(x^2-y^2)(1+zx)(1+zy)$

小结：

1. 对于轮换式，最重要的就是利用字母的轮换对称性，先选其中某个字母为主元，求出有理根，从而确定一个一次因式，再直接写出其他字母的一次因式；

2. 将上述一次因式相乘，与原式的次数进行比较，若所得次数小于原式次数，则采用待定系数法求出所缺因式；若所得次数大于原式次数，则原式等于 0；

3. 对于非齐次式，可采用写成若干齐次式之和的方式，对每一个齐次式按上述方法进行分解，再提公因式或分组分解；

4. 常用到下面重要结论：若 $a+b+c=0$，则 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

十一、因式分解的常见应用

1. （1）设 a 为大于 1 的任意自然数，判断 a^4+4 是否是质数.

（2）若 n 是正整数，且 n^4-16n^2+100 是质数，求 n 的值.

2. 计算：$\dfrac{(7^4+64)(15^4+64)(23^4+64)(31^4+64)(39^4+64)}{(3^4+64)(11^4+64)(19^4+64)(27^4+64)(35^4+64)}$

3. 若 a，b，c 是三角形的三边长，且满足 $a^2+2b^2+c^2=2b(a+c)$，则该三角形是什么三角形?

4. 对于一个自然数 k，如果能找到非零自然数 m 和 n，使得 $k=m+n+m\times n$（m、n 可以相同），则称 k 为一个“平行线数”．例如 $3=1+1+1\times 1$，所以 3 就是一个“平行线数”．在 1，2，3，…，100 这 100 个自然数中，“平行线数”有几个?

5. 已知黑板上写着两个数：1 和 2，现允许按如下规则写出新的数：当黑板上有 a 和 b 时，可以写上数 $ab+a+b$．试问能否在黑板上写出数 13121 和 12131？

6. 在 100×100 的方格表中的每个方格中都写有一个正号“+”．允许同时改变整行与整列的所有方格中所写的符号.问能否经过若干次这种操作，使得方格表中恰有 2014 个负号“−”？

7. （1）方程：$x^2+2xy+3y^2=34$ 有多少组整数解?

（2）平面直角坐标系中，满足不等式 $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$ 的整数点坐标 $(x,\ y)$ 有多少个?

第 13 讲　相交线

主要内容

1． 深刻理解直线相交与平行的概念，及由相交所产生的几个重要概念：交点、邻补角、对顶角、垂直（不过需要指出的是，在学习了立体几何之后，会知道垂直未必需要相交）．

2． 会通过分类讨论去解决有关直线交点个数的问题：既需要实际动手去画一画，又需要通过分析与计算去指导画的过程.

3． 会通过直线与直线相交的分析去求解直线分割平面的问题，这样的题目往往需要递推的方法.

习题

1. 求证：对顶角相等.

2. 平面上有 6 条不同的直线，

（1）若无三线共点，则它们交点个数的所有可能值有哪些?

（2）若允许多线共点，则它们交点个数的所有可能值有哪些?

3. 平面上有 7 条不同的直线，若其中任意三条直线都不共点，

（1）最多能产生多少个交点?

（2）能画出交点个数分别是 6，12，15 的图形吗?

（3）求出交点个数的所有可能值.

4. 在同一平面内有 9 条直线，如何安排才能满足下列两个条件：

（1）任意两条直线都有交点；

（2）总共有 29 个交点.

5.（1）求出 3 条直线能把平面分成的部分数的所有可能值；

（2）求出 4 条直线能把平面分成的部分数的所有可能值；

（3）求出 5 条直线能把平面分成的部分数的最大值；

（4）求出 n 条直线能把平面分成的部分数的最大值.

6.（1）n 个点最多能把一条直线分成几段?

（2）n 条直线最多能把一个平面分成几部分?

（3）n 个平面最多能把空间分成几部分?

【巩固】

（1）把一个不计厚度的圆饼切 5 刀，最多能切成几块?

（2）把一块豆腐（需要考虑厚度）切 5 刀，最多能切成几部分? 请画出图形.

7. 试证对任意一个大于某个数 n_0 的正整数 n，都可以用一些直线将平面分成 n 个区域，且这些直线中一定有相交的，并求 n_0 的最小值.

第 14 讲　相交线与平行线

主要内容：

1. 在上一讲学习了平面内两直线位置关系的基础上，进一步学习“三线八角”问题，重点是同位角、内错角、同旁内角的识别.

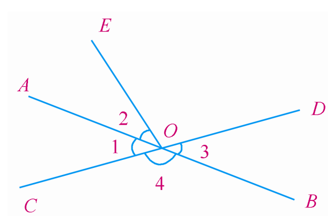
2. 本讲的核心是平行线的性质与判定，共 6 条结论，其中包括一个公理（其实就是起一个理论前提或假设的作用）和 5 个由此导出的定理．这 6 条结论是整个欧氏几何的基石，同学们要从这里开始仔细体会平面几何推理的妙趣.

3. 由平行线的性质可以推导出三角形的内角和是 180°，这是下一讲的基础.

习　题

一、相关角的辨析及应用

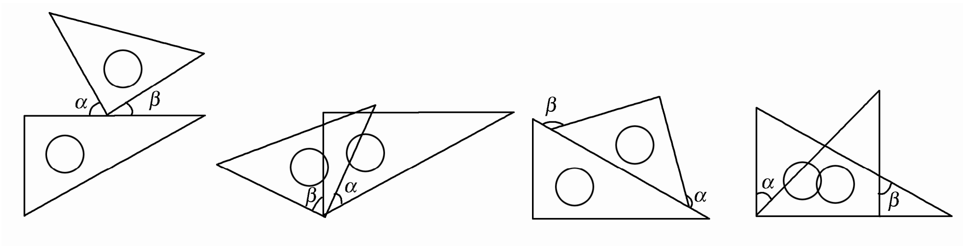
1. 如图，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$．则$\angle 1$ 的对顶角是________，$\angle 4$ 的邻补角是______，$\angle 2$ 的补角是_________.



2. 一个角的补角和这个角的余角互补，则这个角的度数为_________.

3. 将一副直角三角尺按如图所示的不

同方式摆放，请依次写出图中$\angle\alpha$与$\angle\beta$的数量关系_______、________、______、______.



图①　图②　图③　图④

4. 如图 1：

（1）$\angle1$ 和$\angle7$ 是直线___和直线___被直线____所截得到的___角.

（2）$\angle4$ 和$\angle5$ 是直线____和直线____被直线___所截得到的____角.

（3）$\angle3$ 和$\angle7$ 是直线____和直线____被直线____所截得到的___角.

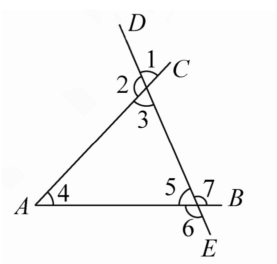


图 1

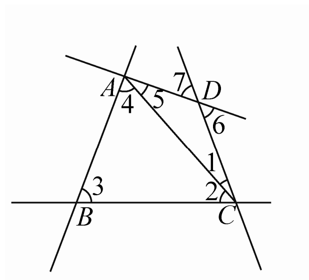


图 2

【巩固】如图 2：

（1）$\angle3$ 和$\angle2$ 是直线______和直线_______被直线_____所截得到的______角.

（2）$\angle2$ 和$\angle5$ 是直线______和直线______被直线______所截得到的______角.

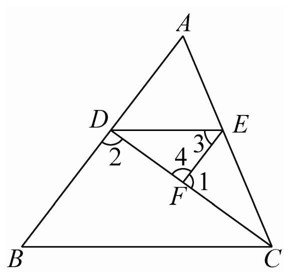
（3）$\angle5$ 和$\angle6$ 是直线____和直线_____被直线___所截得到的___角.

5. 若平面上 4 条直线两两相交，且无三线共点，则一共有______对同旁内角.

6. O 为平面上一点，过 O 点在这个平面上引 2014 条不同的直线 l_1，l_2，l_3，…，l_{2014}，则可形成______对以 O 为顶点的对顶角.

二、根据平行线的性质或判定解决下列问题

1. 如图，已知 $\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3=\angle B$，试判断 $\angle AED$ 与 $\angle ACB$ 的大小关系，并说明理由.



解：____________________. 理由如下：

∵ $\angle 1+\angle 4=180°$　（平角定义）

$\angle 1+\angle 2=180°$　（已知）

∴ $\angle 2=\angle 4$　（　　　　）

∴ $EF // AB$　（　　　　）

∴ ________________　（两直线平行，内错角相等）

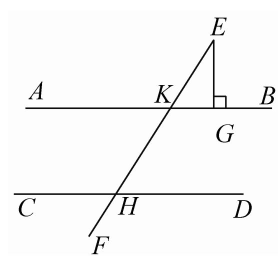
∵ $\angle 3=\angle B$　（　　　　）

∴ $\angle B=\angle ADE$　（　　　　）

∴ $DE // BC$　（　　　　）

∴ ________________　（　　　　）

2. 如图，已知直线 EF 和 AB、CD 分别相交于点 K、H，且 $EG\perp AB$，$\angle CHF=60°$，$\angle E=30°$，证明：$AB // CD$.



证明：∵ $EG\perp AB$　（　　　　）

∴ $\angle EGK=90°$　（　　　　）

∵ $\angle E=30°$　（　　　　）

$\therefore \angle EKG=180°-\angle EGK-\angle E$ （　　　　）

$=180°-90°-30°$

$=60°$

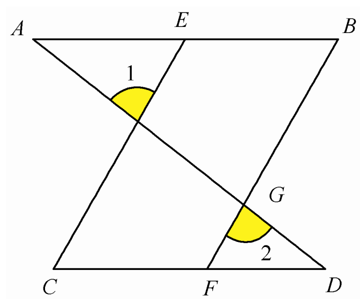
$\therefore \angle AKH=\angle EKG=60°$ （　　　　）

$\because \angle CHF=60°$ （　　　　）

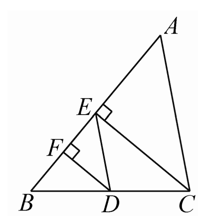
$\therefore$ ________________ （　　　　）

$\therefore AB // CD$ （　　　　）

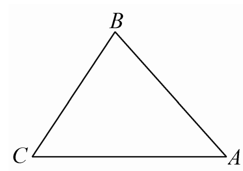
3. 如图，直线 AD 与 AB、CD 相交于 A、D 两点，EC、BF 与 AB、CD 相交于 E、C、B、F，如果$\angle 1=\angle 2$，$\angle B=\angle C$．求证：$\angle A=\angle D$.



4. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$CE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F，$AC//ED$，CE 是$\angle ACB$ 的平分线．求证：$\angle EDF=\angle BDF$.



5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.



6. 探究：

（1）如图 a，若 $AB\parallel CD$，则 $\angle B+\angle D=\angle E$，你能说明为什么吗?

（2）反之，若 $\angle B+\angle D=\angle E$，直线 AB 与 CD 有什么位置关系？请证明.

（3）若将点 E 移至图 b 所示位置，此时 $\angle B$、$\angle D$、$\angle E$ 之间有什么关系？请证明.

（4）若将 E 点移至图 c 所示位置，情况又如何?

（5）在图 d 中，$AB\parallel CD$，$\angle E+\angle G$ 与 $\angle B+\angle F+\angle D$ 又有何关系?

（6）在图 e 中，若 $AB\parallel CD$，又得到什么结论?

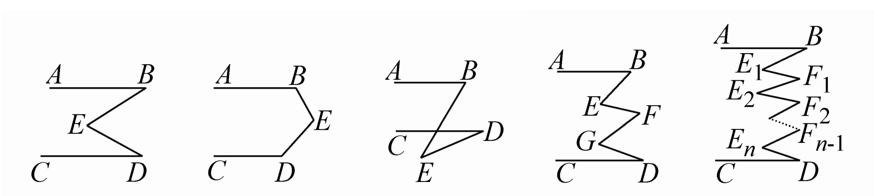
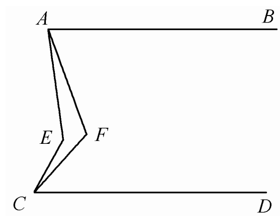
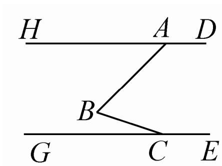


图 a　图 b　图 c　图 d　图 e

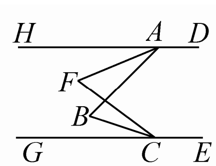
7. 如图，已知 $AB/\!/CD$，$\angle EAF=\frac{1}{4}\angle EAB$，$\angle ECF=\frac{1}{4}\angle ECD$，求证：$\angle AFC=\frac{3}{4}\angle AEC$.



8. 如图①，已知 $\angle DAB+\angle ABC+\angle BCE=360°$.



图①

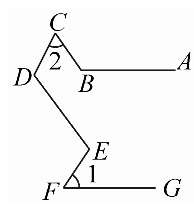


图②

（1）求证：$AD/\!/CE$.

（2）在（1）的条件下，如图②，作 $\angle BCF=\angle BCG$，CF 与 $\angle BAH$ 的平分线交于点 F，若 $\angle F$ 的余角等于 $2\angle B$ 的补角，求 $\angle BAH$ 的度数.

9. 如右图，已知 $CD/\!/EF$，$\angle 1+\angle 2=\angle ABC$，求证：$AB/\!/GF$.



三、角度的相关计算

1. 如图 1，已知 $AD/\!/EG/\!/BC$，$AC/\!/EF$，则图中与 $\angle 1$ 相等的角有______个.

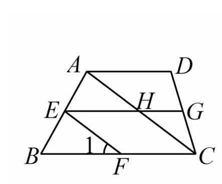


图 1

2. 如图 2，将一把直尺与一个三角尺放在一起，

在图中标记的所有角中，与$\angle 1$ 互余的角的个数是______.

3. 如图 3，$AB // CD // EF // GH$，$AE // DG$，点 C 在 AE 上，点 F 在 DG 上，设与$\angle\alpha$ 相等的角的个数为 m（不包括$\angle\alpha$ 本身），与$\angle\beta$ 互补的角的个数为 n，若 $\alpha \neq \beta$，则 $m+n$ 的值是_________ .

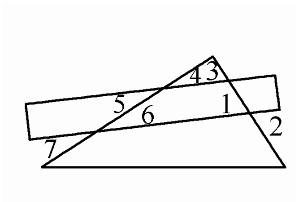


图 2

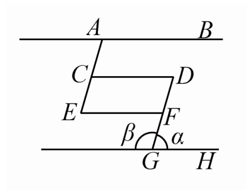
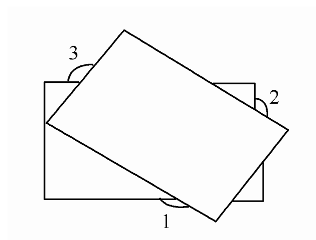


图 3

4. 两本书按如右图所示方式叠放在一起，则图中相等的角是__________.

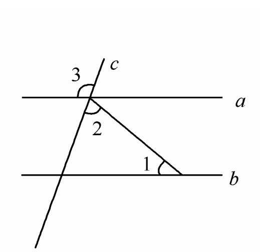


第 4 题图

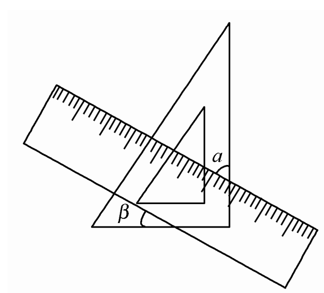
5. 已知$\angle A$ 的两条边和$\angle B$ 的两条边分别平行，且$\angle A$ 比$\angle B$ 的 3 倍少 20°，则$\angle B$=______.

6. 如图 6，直线 a，b 被直线 c 所截，若 $a // b$，$\angle 1=40°$，$\angle 2=70°$，则$\angle 3$=_________度.

7. 小亮将一个直角三角板和一把直尺叠放在一起，如果$\angle\alpha=43°$，那么$\angle\beta$ 是_________度.



第 6 题图

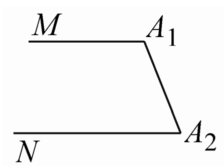


第 7 题图

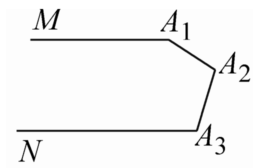
8. （1）如图①，$MA_1 // NA_2$，则 $\angle A_1+\angle A_2=$________.

如图②，$MA_1 // NA_3$，则 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3=$__________.

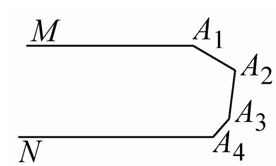
如图③，$MA_1 // NA_4$，则 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4=$__________.



图①



图②

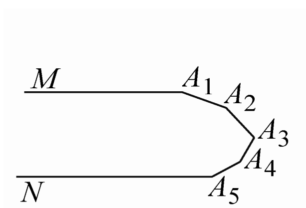


图③

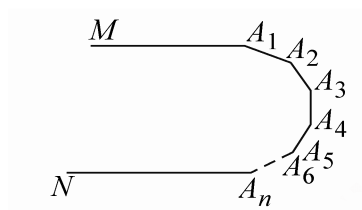
如图④，$MA_1 // NA_5$，则 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5=$__________.

从上述结论中你发现了什么规律？请你在图②，图③，图④中选一个证明你的结论.

（2）如图⑤，$MA_1 // NA_n$，则 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\cdots+\angle A_n=$________.

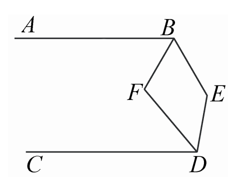


图④



图⑤

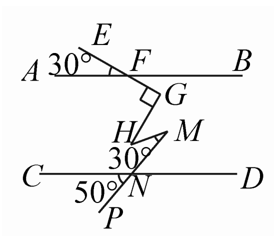
（3）利用上述结论解决问题：如图已知 $AB // CD$，$\angle ABE$ 和 $\angle CDE$ 的平分线相交于点 F，$\angle E=140^\circ$，求 $\angle BFD$ 的度数.



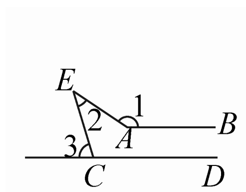
9. 直线 $AB // CD$，$\angle EFA=30°$，$\angle FGH=90°$，$\angle HMN=30°$，$\angle CNP=50°$，则 $\angle GHM$ 的大小是______.

10. 若 $AB // CD$，则 $\angle 1+\angle 3-\angle 2$ 的度数等于_________.

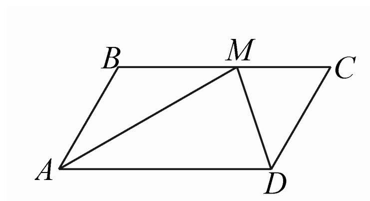
11. 平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 边于点 M，而 MD 平分 $\angle AMC$，若 $\angle MDC=45°$，则 $\angle BAD=$____，$\angle ABC=$____.



第 9 题图

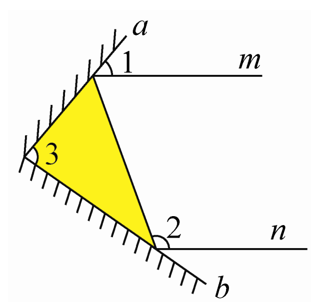


第 10 题图



第 11 题图

12. 实验证明，平面镜反射光线的规律是：射到平面镜上的光线和被反射出的光线与平面镜所夹的锐角相等.



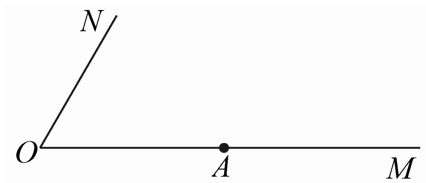
（1）如图，一束光线 m 射到平面镜 a 上，被 a 反射到平面镜 b 上，又被 b 反射. 若被 b 反射出的光线 n 与光线 m 平行，且 $\angle 1=50°$，则 $\angle 2=$________，$\angle 3=$________.

（2）在（1）中，若 $\angle 1=55°$，则 $\angle 3=$ ____；若 $\angle 1=40°$，则 $\angle 3=$______.

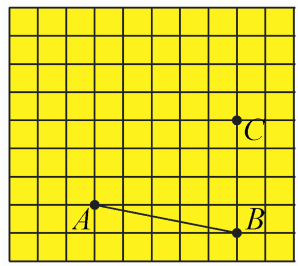
（3）由（1）、（2），请你猜想：当平面镜 a、b 的夹角 $\angle 3=$________时，可以使任何射到平面镜 a 上的光线 m，经过平面镜 a、b 的两次反射后，与反射光线 n 平行. 请说明理由.

四、画图

1. 如图，ON 是一条公路桥梁，现要在上游点 A 处再建一座与 ON 平行的大桥 AB，请你用直尺和圆规画出 AB 的方向（不必写作法），并根据你的作法用一句话简单地说明为什么 AB 和 ON 是平行的?



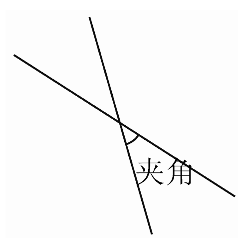
2. 在如图所示的方格纸中，经过线段 AB 外一点 C，不用量角器与三角尺，仅用直尺，画线段 AB 的垂线和平行线.



五、解决下列问题

1. 平面上有 5 条直线，其中任意两条都不平行，那么在这 5 条直线两两相交所成的角中，至少有一个角不超过 36°，请说明理由.

2. 两条直线相交，四个交角中的一个锐角（或一个直角）称为这两条直线的“夹角”（如图），如果在平面上画 L 条直线，要求它们两两相交，并且“夹角”只能是 15°、30°、45°、60°、75°、90° 之一，问：



（1）L 的最大值是多少?

（2）当 L 取最大值时，所有的“夹角”之和是多少?

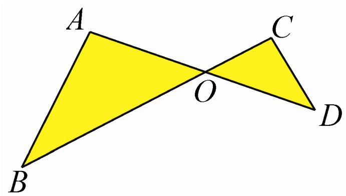
第 15 讲　三角形的内角和与三角形中的重要线段

主要内容

1. 掌握三角形的内角和、外角、外角和；熟记三角形的内角平分线、高、中线以及相应的内心、垂心、重心的概念，并会综合运用这些线段进行角的转换.

2. 本讲的难点就是角的转换，这也是整个初中几何的难点，后面在学习相似和圆的时候要频繁地使用角的转换的技巧；熟练掌握本讲中涉及角的转换的五个模型：

（1）“对顶三角形”：

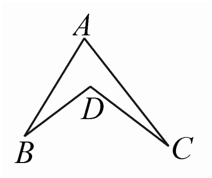


如图，△AOB 与△COD 共用顶点 O，其中，A、O、D 共线，B、O、C 共线，则 $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

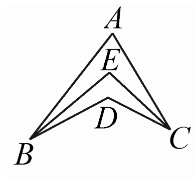
（2）“规形”：

图①，凹四边形 $ABDC$ 形似圆规，这样的凹四边形称为“规形”，易知 $\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$；

图②，在凹四边形 $ABDC$ 中，已知 $\angle ABD$ 与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 E. 易知 $\angle E=\dfrac{\angle A+\angle D}{2}$.

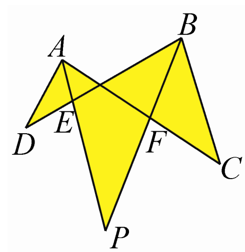


图①



图②

（3）关于三角形内外角平分线的一个重要模型：见习题第 8 题；其中容易得到三角形内心的重要性质，以及 P、B、M、C 四点共圆（四点共圆以后会学到，这也是角的转换的重要工具）.



（4）“爪形”：如图，$\angle CAD$ 和 $\angle CBD$ 的平分线相交于点 P，则 $\angle P=\dfrac{\angle C+\angle D}{2}$.

（5）三角形的内角平分线与同一个顶点引出的高线的夹角等于两底角之差的一半．见习题第 12 题.

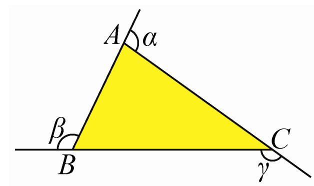
上述五个模型无论从形式上看，还是从推导过程上看，都十分优美简洁．我们要会从组合图形中找出基本模型，这种能力是学习平面几何最重要的能力.

习题

1. $\triangle ABC$ 中，三个内角满足：$\angle A$ 最小，$\angle B$ 最大，且 $2\angle B=5\angle A$，求 $\angle B$ 的取值范围.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，三个内角的度数均为整数，且 $\angle A<\angle B<\angle C$，$4\angle C=7\angle A$，求 $\angle B$ 的度数.

3. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角分别记为 α、β、γ，若 $\alpha:\beta:\gamma=3:4:5$，则 $\angle A:\angle B:\angle C=$__________.



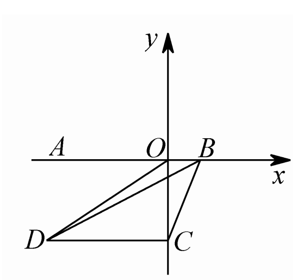
4. 在$\triangle ABC$ 中，高 BD 和 CE 所在的直线相交于点 O，若$\triangle ABC$ 不是直角三角形，且 $\angle A=60°$，求 $\angle BOC$.

5. 已知：如图①，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 为 x 轴负半轴上一点，点 $C(0,-2)$，$D(-3,-2)$.

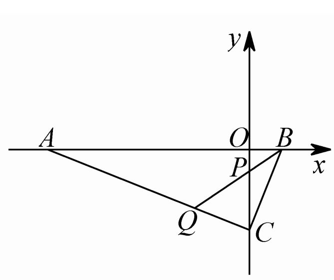
（1）求$\triangle BCD$ 的面积；

（2）如图②，若 $AC\perp BC$ 于 C，作$\angle CBA$ 的平分线交 CO 于 P，交 CA 于 Q，求证：$\angle CQP=\angle CPQ$；

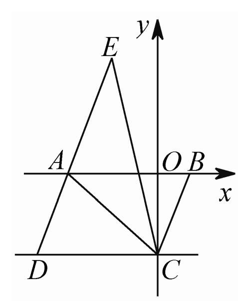
（3）如图③，若点 B 为 x 轴正半轴上的动点，$\angle ACB$ 的平分线 CE 交 DA 的延长线于 E 点，设$\angle ADC=\angle DAC=\alpha$，$\angle ACE=\beta$，请你用含 α、β 的式子表示$\angle E$ 的大小；



图①



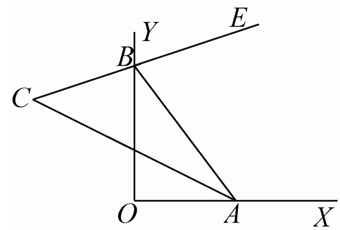
图②



图③

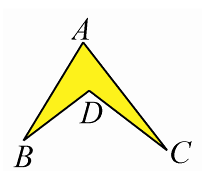
（4）在（3）的条件下，$\angle E$ 与 $\angle ABC$ 的比值是否发生变化?

6. 已知：如图，$\angle XOY=90°$，点 A、B 分别在射线 OX、OY 上移动，BE 是 $\angle ABY$ 的平分线，BE 的反向延长线与 $\angle OAB$ 的平分线相交于点 C，试问 $\angle ACB$ 的大小是否发生变化. 如果保持不变，请给出证明，如果随点 A、B 移动而发生变化，请求出变化的范围.

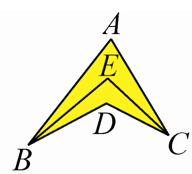


7. （1）如图①，凹四边形 $ABDC$ 形似圆规，这样的凹四边形称为“规形”，探索 $\angle BDC$ 与 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的关系；

（2）如图②，在凹四边形 $ABDC$ 中，已知 $\angle ABD$ 与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 E. 求证：$\angle E=\dfrac{\angle A+\angle D}{2}$.

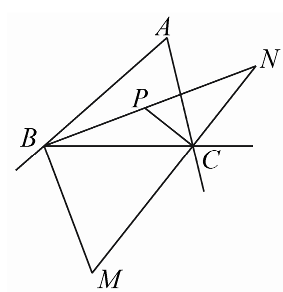


图①

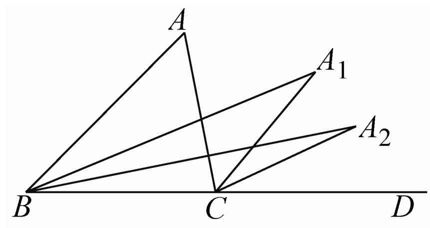


图②

8. 如图，$\triangle ABC$ 的两内角平分线交于点 P，两外角平分线交于点 M，一内角平分线与一外角平分线交于点 N. 试分别探究 $\angle BPC$、$\angle M$、$\angle N$ 与 $\angle A$ 的关系.

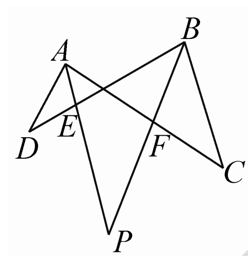


9. 如图，在△ABC 中，$\angle A=\alpha$，$\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 A_1，得 $\angle A_1$；$\angle A_1BC$ 的平分线与 $\angle A_1CD$ 的平分线相交于点 A_2，得 $\angle A_2$；…，$\angle A_{2014}BC$ 的平分线与 $\angle A_{2014}CD$ 的平分线交于点 A_{2015}，得 $\angle A_{2015}$.



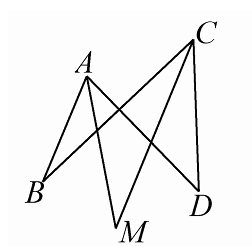
则 $\angle A_{2015}=$____________.

10. 如图，$\angle CAD$ 和 $\angle CBD$ 的平分线相交于点 P，设 $\angle CAD$、$\angle CBD$、$\angle C$、$\angle D$ 的度数依次为 a、b、c、d，用仅含有两个字母的代数式表示 $\angle P$ 的度数.



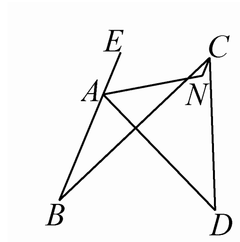
11. 平面内的四条线段 AB、BC、CD、DA 首尾顺次连接，已知 $\angle ABC=24°$，$\angle ADC=42°$.

（1）如图①，若 $\angle BAD$ 与 $\angle BCD$ 的平分线交于点 M，求 $\angle AMC$ 的值；



图①

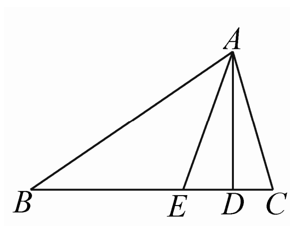
（2）如图②，点 E 在 BA 的延长线上，$\angle DAE$ 的平分线和 $\angle BCD$ 的平分线交于点 N，求 $\angle ANC$ 的值．



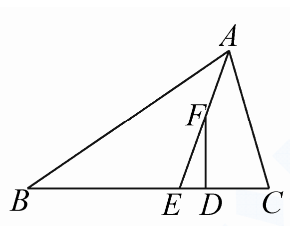
图②

12.（1）如图①，$AD\perp BC$ 于 D，AE 平分 $\angle BAC$，探寻 $\angle DAE$ 与 $\angle C$、$\angle B$ 的关系（注：$\angle C>\angle B$）；

（2）如图②，将点 A 在 AE 上移动到 F，$FD\perp BC$ 于 D，其他条件不变，那么 $\angle EFD$ 与 $\angle C$、$\angle B$ 是否还有（1）中的关系？



图①



图②

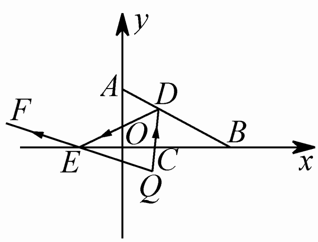
13. 在直角坐标系 xOy 中，在第一象限 AB 方向和 x 轴上各有一平面镜，一束光线 CD 经过两次反射后的反射光线是 EF，且 $\angle DCE>\angle DEC$，已知 $C(m，0)$，$E(n，0)$．

（1）若 m，n 满足 $|m-3|+(n+4)^2=0$，求 C、E 点的坐标；

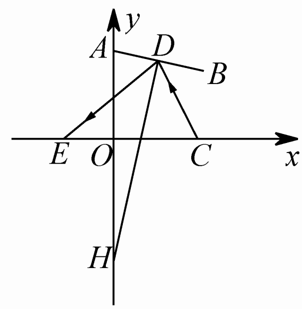
（2）如图①，若 $\angle ABE=30°$，求入射光线 CD 和反射光线 EF 所在直

线的夹角 $\angle Q$ 的度数;

(3)如图②,若平面镜 AB 绕 D 点旋转时,设法线 DH(即 $DH \perp AB$)交 y 轴于点 H. 问 $\dfrac{\angle DCE-\angle DEC}{\angle OHD}$ 的值是否改变?若不变,求出其值;若改变,说明理由.



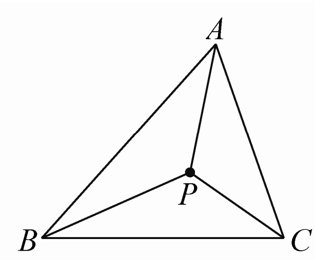
图①



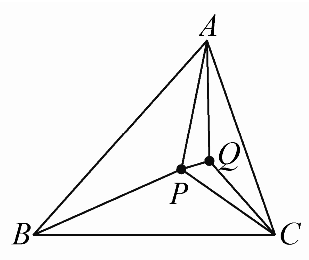
图②

14. 在三角形纸片内有 2011 个点,连同三角形纸片的 3 个顶点,共有 2014 个点,在这些点中,没有三点在同一条直线上. 问:以这 2014 个点为顶点能把三角形纸片分割成多少个没有重叠部分的小三角形?

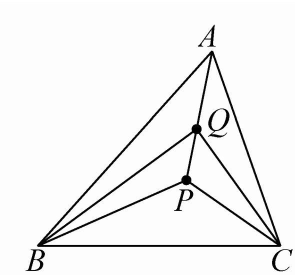
15. 问题提出:以 n 边形的 n 个顶点和它内部的 m 个点,共 $(m+n)$ 个点作为顶点,可把原 n 边形分割成多少个互不重叠的小三角形?



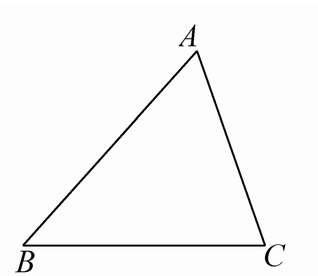
图①



图②



图③



图④

问题探究：为了解决上面的问题，我们将采取一般问题特殊化的策略，先从简单和具体的情形入手：

探究一：以△ABC 的 3 个顶点和它内部的 1 个点 P，共 4 个点为顶点，可把△ABC 分割成多少个互不重叠的小三角形?

如图①，显然，此时可把△ABC 分割成 3 个互不重叠的小三角形.

探究二：以△ABC 的 3 个顶点和它内部的 2 个点 P、Q，共 5 个点为顶点，可把△ABC 分割成多少个互不重叠的小三角形?

在探究一的基础上，我们可看作在图①△ABC 的内部再添加 1 个点 Q，那么点 Q 的位置会有两种情况：

一种情况，点 Q 在图①分割成的某个小三角形内部. 不妨设点 Q 在△PAC 的内部，如图②；

另一种情况，点 Q 在图①分割成的小三角形的某条公共边上．不妨设点 Q 在 PA 上，如图③．

显然，不管哪种情况，都可把△ABC 分割成 5 个互不重叠的小三角形．

探究三：以△ABC 的三个顶点和它内部的 3 个点 P、Q、R，共 6 个点为顶点，可把△ABC 分割成______个互不重叠的小三角形，并在图④中画出一种分割示意图．

探究四：以△ABC 的三个顶点和它内部的 m 个点，共$(m+3)$个点为顶点，可把△ABC 分割成________个互不重叠的小三角形．

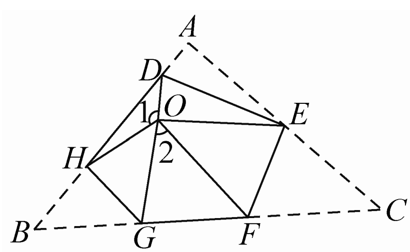
探究拓展：以四边形的 4 个顶点和它内部的 m 个点，共$(m+4)$个点为顶点，可把四边形分割成________个互不重叠的小三角形．

问题解决：以 n 边形的 n 个顶点和它内部的 m 个点，共$(m+n)$个点作为顶点，可把原 n 边形分割成________个互不重叠的小三角形．

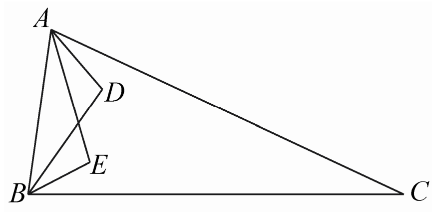
实际应用：以八边形的 8 个顶点和它内部的 2014 个点，共 2022 个顶点，可把八边形分割成多少个互不重叠的小三角形？(要求列式计算)

【近年竞赛题选编】

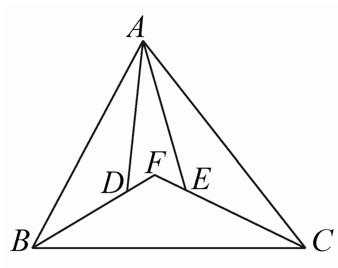
1. 如图，将△ABC 沿 DE，HG，EF 翻折后压平，△ABC 三个顶点 A，B，C 均落在点 O 处．若∠2=51°，则∠1 的度数为________________．



2. 如图，在△ABC中，AD、AE为∠BAC的三等分线，BD、BE为∠ABC的三等分线，如果∠ADB=104°，∠AEB=101°，那么∠C=________.



3. 如图，D、E是△ABC内两点，∠BAD=∠DAE=∠EAC，BD、CE分别平分∠ABC和∠ACB，且相交于点F．如果∠ADB=127°，∠AEC=132°，那么∠BFC=______.



第 16 讲　三角形的三边不等式关系

主要内容

1. 基本结论：三角形的任意两边长度之和大于第三边，任意两边长度之差小于第三边.

2. 本讲涉及的主要方法是应用不等式估值求出边长的范围，如果是整数边长问题，又往往涉及有序枚举.

3. 三角形三边不等式关系是求解许多几何不等式问题的重要工具，也是竞赛中的难点，在处理这样的题目时，要注意图形中不同部分的地位相同性，从而对称地处理不等式.

习题

一、完成下面各题

1. 已知三角形三边长分别为 2，x，13，若 x 为正整数，则这样的三角形有___个.

2. 若三角形的三边长分别为 3，4，$x-1$，则 x 的取值范围是____________.

3. 三角形的周长是偶数，其中有两边的长是 2 和 5，则这个三角形是_________三角形（按边分类）.

4. 已知△ABC 的两条高线的长分别为 5 和 20，若第三条高线的长也是整数，则第三条高线长的最小值为______.

5. 不等边三角形 ABC 的两条高线的长分别为 4 和 12，若第三条高线的长也是整数，则这条高线的长等于________.

二、完成下面各题

1. 三角形三边的长都是正整数，其中最长边的长为 10，这样的三角形有________个.

2. 若三角形三边的长 a、b、c 都是整数，且 $a\leqslant b<c$，若 b=7，则这样的三角形有__________个.

3. 周长为 30，各边长互不相等且都是整数的三角形共有多少个?

4. 将长度为 25cm 的细铁丝折成边长都是质数（单位：厘米）的三角形，若这样的三角形三边的长分别是 a，b，c 且满足 $a\leqslant b\leqslant c$，则（a，b，c）有____组解，所构成的三角形都是____三角形.

5. 在平面上用 18 根长度相等的火柴首尾相接围成等腰三角形，这样的等腰三角形一共可以围成____种.

6. 用长度相等的 100 根火柴杆，摆放成一个三角形，使最大边的长度是最小边长度的 3 倍，求满足此条件的每个三角形的各边所用火柴杆的根数.

7. 设整数 a，b，c（$a\geqslant b\geqslant c$）是三角形的三边长，满足 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=13$，求符合要求且周长不超过30的三角形的个数.

三、完成下面各题

1. 7 条长度均为整数的线段 a_1，a_2，…，a_7 满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_7$，且这 7 条线段中的任意三条都不能构成三角形，若 $a_1 = 1$，$a_7 = 21$，则 $a_6 =$ (　　)

A. 18　　B. 13　　C. 8　　D. 5

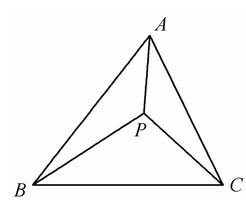
2. 现有长为 150cm 的铁丝，要截成 n（$n > 2$）小段，每段的长为不小于 1cm 的整数．如果其中任意 3 小段都不能拼成三角形，试求 n 的最大值，此时有几种方法可将该铁丝截成满足条件的 n 段?

3. 从 1，2，…，2014 中任选 k 个数，使所选的 k 个数中，一定可以找到能构成三角形边长的 3 个数（这里要求三角形三边长互不相等）．试问：满足条件的 k 的最小值是多少?

四、完成下面各题

1. 如图，已知 P 为△ABC 内任一点．

（1）$AB + BC + CA$ 与 $2(PA + PB + PC)$ 哪个大？证明你的结论；



（2）$AB+BC+CA$ 与 $PA+PB+PC$ 哪个大？证明你的结论.

2. 点 C_1，A_1，B_1 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC 和 CA 上，且满足 $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{1}{3}$，求证：$\Delta ABC$ 的周长 p 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长 p_1 之间满足不等式：$\frac{1}{2}p<p_1<\frac{3}{4}p$.

第 17 讲　多边形内角和与平面镶嵌

主要内容

1. 我们学习了三角形的内角和，在研究多边形内角和的时候，可以通过连接对角线把多边形的问题化归为三角形的问题.

2. 多边形的内角和随着边数的增大而呈等差数列变化，而外角和恒为 360°，因此在解决某些问题时，可以把内角问题化归为外角问题以静御动.

3. 善于运用三角形外角的性质（外角等于不相邻的两个内角和）、对顶三角形、对顶四边形、“规形”等常见模型把分散的角“集中”，求解某些角度和问题；对于这些求角度和的问题，还要善于运用整体法和包含与排除的思想去处理.

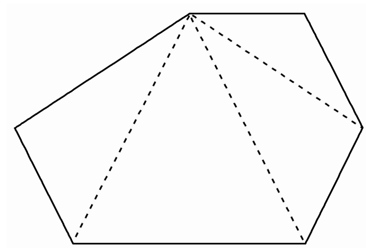
4. 善于运用不等式及不定方程整数解，研究某些多边形内角的问题.

5. 对于平面镶嵌问题，往往从镶嵌图形的基本组成图形的内角去考虑——围绕一点拼在一起的若干多边形的内角加起来为 360°，从而将问题转化成不定方程整数解的问题.

习题

1. 我们学习了三角形内角和是 180°，那其他多边形的内角和怎么求呢？以六边形为例：

由于我们所熟悉的是三角形的内角和，因此设法把六边形分割成三角形来处理。



我们从六边形的某一个顶点出发作它的三条对角线，如图所示，六边形被分割成四个三角形，所以六边形的内角和等于这四个三角形的内角和：$180°\times4=720°$．这种把未解决的问题转化成已解决的问题的思想，就是“化归思想”，这是一种非常重要的数学思想.

同学们能不能用此方法推导出 n 边形的内角和公式呢?

2. （1）凸 n 边形共有________条对角线.

（2）一个凸 n 边形的每一个内角都等于 140°，则从这个多边形的一个顶点引出的对角线有_______条.

（3）从凸 n 边形的一个顶点引出的所有对角线把这个凸 n 边形分成了 m 个小三角形，若 m 等于这个凸 n 边形对角线条数的 $\frac{4}{9}$，那么此 n 边形的内角和为_________.

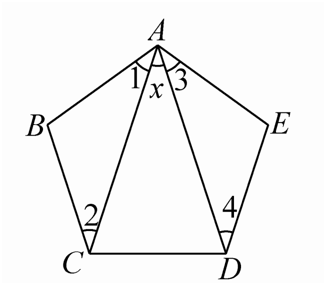
（4）一个多边形的对角线的条数等于边数的 5 倍，则这个多边形是_____边形.

（5）一个凸 n 边形的每一个内角都等于 135°，则这个多边形的所有对角线在 n 边形内最少有________个交点；同边数的多边形（未必是正多边形）中，对角线在 n 边形内最多有________个交点.

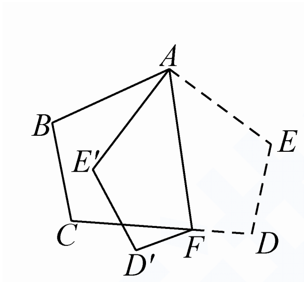
3. （1）如图，已知正五边形 $ABCDE$ 中，$\angle x=$_________ 度.

（2）将五边形纸片 $ABCDE$ 按如图所示的方式折叠，折痕为 AF，

点 E、D 分别落在 E'、D' 上，已知 $\angle AFC=76°$，则 $\angle CFD'$ 等于__________.

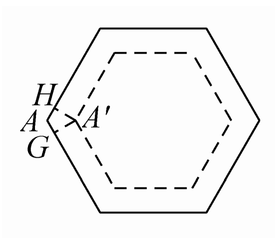


第（1）题图

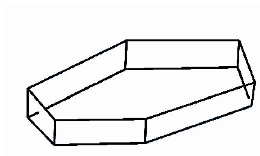


第（2）题图

（3）如图①，将一块正六边形硬纸片做成一个底面仍是六边形且高相等的无盖纸盒（如图②，侧面均垂直于底面），需要在每个顶点处剪去一个四边形，如图①中的四边形 $AGA'H$，那么 $\angle GA'H$ 的度数为____.

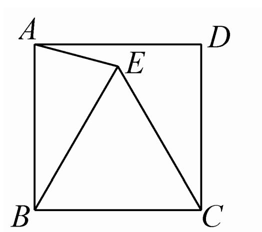


第（3）题图①


第（3）题图②

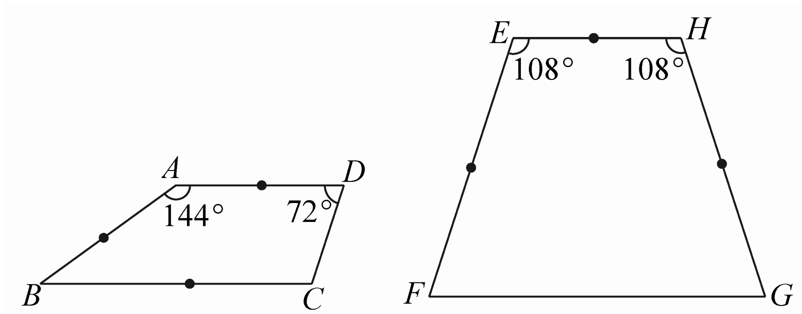
（4）如右图，以正方形 $ABCD$ 的边 BC 为边长向正方形内侧作正三角形 BCE，则 $\angle AEB=$________度.

（5）利用上题的图形求一个锐角为15°，斜边长为10 的直角三角形的面积.



第（4）题图

（6）在下图中的梯形 $ABCD$ 和梯形 $EFGH$ 中，$AB=AD=EH$，并且 $BC=EF=GH$. 当梯形 $EFGH$ 的面积是 100 平方厘米时，求梯形 $ABCD$ 的面积.



4. （1）一个凸 n 多边形，除去一个内角外，其余内角和为 2570°，求 n 的值.

（2）一个凸 n 边形，除一个内角外，其余内角的和是 2400°，则它有几条对角线?

（3）一个凸 n 边形，除了两个内角外，其内角之和为 2002°，求 n 的值.

（4）边数均为偶数的两个正多边形的内角和为 1800°，则这两个正多边形的边数分别为多少?

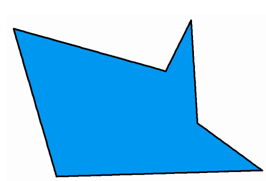
（5）一个多边形截去一个（三角形状的）角后，形成另一个多边形，其内角和是3060°，则原多边形是几边形?

（6）一位模型赛车手遥控一辆赛车，先前进一米，然后原地按逆时针方向旋转$a°$（$0°<a°<180°$），被称为一次操作，若5次操作后发现赛车回到出发点，则$a°$角为________.

5.（1）凸多边形恰好有3个内角是钝角，这样的多边形边数的最大值是多少?

（2）如果一个凸n边形恰有4个内角是钝角，那么这个多边形的边数n最多是多少?

（3）如图是一个六边形，它有3个锐角．若一个十二边形的任意两个边除了顶点处之外并不相交于内部，请问这个十二边形最多可能有多少个锐角?



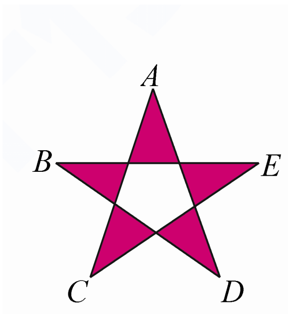
（4）在凸十边形的所有内角中，锐角的个数最多是多少?

（5）在凸n边形的所有内角中，锐角的个数最多是多少?

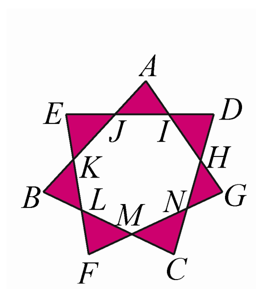
（6）称大于 180°，但小于 360°的角为优角，则一个 2014 边形最多有多少个优角？一个 n 边形最多有多少个优角？

6.（1）如图①，任意画一个五角星，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数.

（2）如图②，用“一笔画”方法画成的七角形，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$度数.



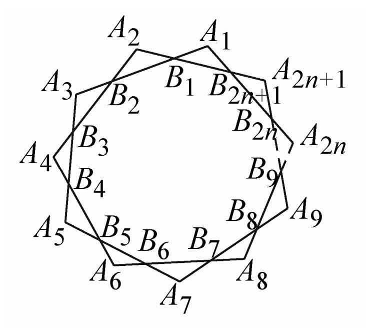
图①



图②

（3）如图③，用“一笔画”方法画成的 $2n+1$ 角形（$n\geqslant 2$），且多边形 $B_1B_2\cdots B_{2n}B_{2n+1}$ 是凸 $2n+1$ 边形，

求 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\cdots+\angle A_{2n}+\angle A_{2n+1}$ 的度数.

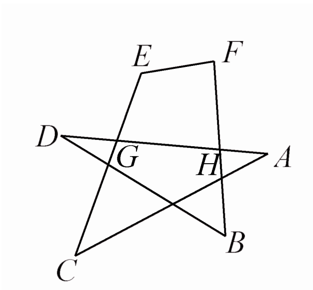


图③

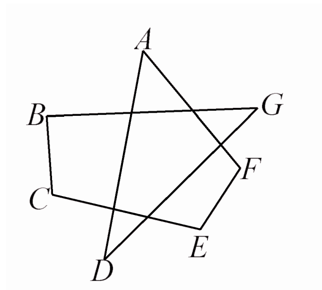
7. （1）如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$______________.

（2）如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=$______________.

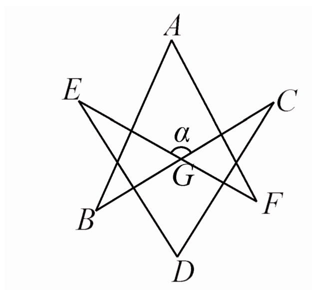
（3）如图，设$\angle CGE=120^\circ$，则$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$____.



第（1）题图



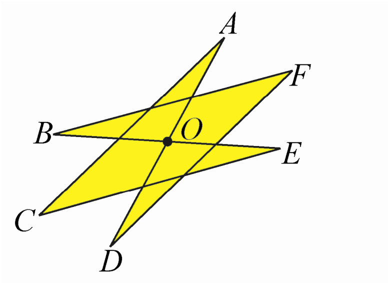
第（2）题图



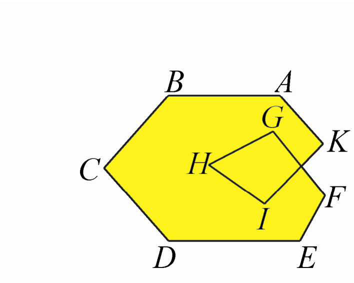
第（3）题图

（4）如图是一个六角星，已知$\angle AOE=60^\circ$，则$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$_________.

（5）如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle I+\angle K$的度数为________.

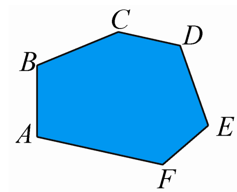


第（4）题图



第（5）题图

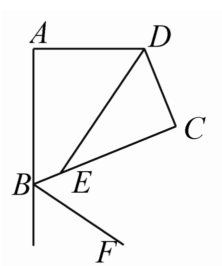
8. （1）如图，在凸六边形 $ABCDEF$ 中，已知 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle D+\angle E+\angle F$ 成立，试证明：该六边形必有两条边是平行的.



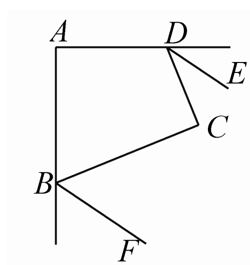
（2）已知凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$.

1）如图①，若 DE 平分 $\angle ADC$，BF 平分 $\angle ABC$ 的邻补角，判断 DE 与 BF 的位置关系并证明;

2）如图②，若 BF、DE 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ADC$ 的邻补角，判断 DE 与 BF 的位置关系并证明.



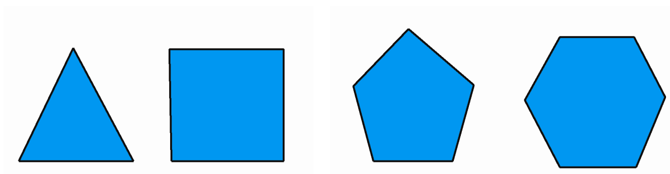
图①



图②

9. 在日常生活中，观察各种建筑物的地板，就能发现地板常用各种正多边形地砖铺砌成美丽的图案，也就是说，使用给定的某些正多边形，能够拼成一个平面图形，即不留下一丝空白，又不互相重叠（在几何里叫作平面镶嵌），这显然与正多边形的内角大小有关，当围绕一点拼在一起的几个多边形的内角加在一起恰好组成一个周角（360°　）时，就拼成了一个平面图形.

（1）请根据下列图形，填写表中空格



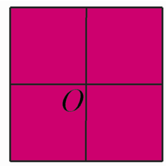
正多边形边数	3	4	5	6	…	n
正多边形每个内角的度数	60°	90°			…	

（2）如果限于用一种正多边形镶嵌，哪几种正多边形能镶嵌成一个平面图形?

（3）从正三角形、正四边形、正六边形中选一种，再从其他多边形中选一种，请画出用这两种不同的正多边形镶嵌成的一个平面图形（草图）；并探索这两种正多边形共能镶嵌成几种不同的平面图形？说明你的理由.

10. 现实生活中，镶嵌图案在地面、墙面乃至于服装面料设计中随处可见．在八年级课题学习“平面图形的镶嵌”中，对于单种多边形的镶嵌，主要研究了正三角形、正四边形、正六边形的镶嵌问题．今天我们把正多边形的镶嵌作为研究问题的切入点，提出其中几个问题，共同来研究．

我们知道，可以单独用正三角形、正方形和正六边形镶嵌平面．如图，用正方形镶嵌平面，可以发现在一个顶点 O 周围围绕着 4 个正方形的内角．试想：如果用正六边形来镶嵌平面，在一个顶点周围应该围绕着______个正六边形的内角．



问题提出

如果我们要同时用两种不同的正多边形镶嵌平面，可能设计出几种不同的组合方案?

问题解决

猜想 1：是否可以同时用正方形、正八边形两种正多边形组合进行平面镶嵌?

分析：我们可以将此问题转化为数学问题来解决．从平面图形的镶嵌中可以发现，解决问题的关键在于分析能同时用于完整镶嵌平面的两种正多边形的内角特点，具体地说，就是在镶嵌平面时，一个顶点周围围绕的各个正多边形的内角恰好拼成一个周角．

验证 1：在镶嵌平面时，设围绕某一点有 x 个正方形和 y 个正八边形，它们的内角可以拼成一个周角，根据题意，可得方程：

$90x+\dfrac{(8-2)\times180}{8}\cdot y=360$，整理得：$2x+3y=8$，

我们可以找到唯一一组适合方程的正整数解为$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.

结论 1：镶嵌平面时，在一个顶点周围围绕的 1 个正方形和 2 个正八边形的内角可以拼成一个周角，所以同时用正方形和正八边形两种正多边形组合可以进行平面镶嵌.

猜想 2：是否可以同时用正三角形和正六边形两种正多边形组合进行平面镶嵌?

若能，请按照上述方法进行验证，并写出所有可能的方案；若不能，请说明理由.

验证 2：____

____.

结论 2：____

____.

上面，我们探究了同时用两种不同的正多边形组合镶嵌平面的部分情况，仅仅得到了一部分组合方案，相信同学们用同样的方法，一定会找到其他可能的组合方案.

问题拓广

请你仿照上面的研究方式，探索出一个同时用三种不同的正多边形组合进行平面镶嵌的方案，并写出验证过程.

猜想 3：______________________________.

验证 3：______________________________.

结论 3：____

____.

11. 用三种边长相等的正多边形地砖铺地，其顶点拼在一起，刚好能完全铺满地面，设正多边形的边数分别为 x、y、z，（1）求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的值．（2）求所有（x，y，z）的组合（不妨设 $x<y<z$）．

12. 现有四种地面砖，它们的形状分别是：正三角形、正方形、正六边形、正八边形，且它们的边长都相等，同时选择其中两种地面砖密铺地面，选择的方式有_______种；拼合的方式有______种．

13. 同时用边长相等的正三角形和正方形拼（无重叠无缝隙）凸多边形，能拼成怎样的凸多边形？

14. （1）一张正方形纸片上被针扎了 2014 个孔，这些孔和正方形顶点中任意两点都不共线．引若干条互不交叉的直线段，它们的端点都是这些孔或正方形的顶点，以将这些正方形分割成一些三角形，并且这些三角形内部和边上都不再有孔．问一共引了多少条线段？共得到多少个三角形？

（2）能否将一个正方形分割成 8 个锐角三角形？如果能，请给出分割方法并说明分割出的三角形是锐角三角形；如果不能，请严格证明．

（3）n 边形的所有对角线最多能将该多边形分成多少个互不相交的小多边形？

第 18 讲　全等三角形（一）

主要内容

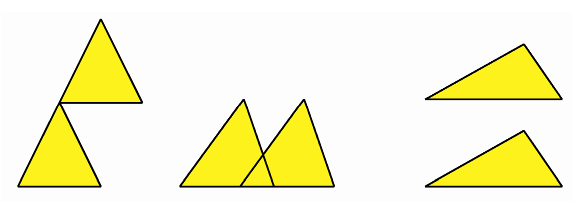
1. 全等三角形的判定定理：SSS，SAS，ASA，AAS，直角三角形全等除了上述判定外，还有 HL．三角形全等，通过转移边和角，来处理关于线段、角度等的证明与计算．

2. 证明三角形全等要善于利用图形中的隐含信息，如公共边（线段）、公共角、等边、等角等，熟练使用“同角的余角（或补角）相等”、“对顶三角形”等重要模型进行角的转移，对常见的等边三角形、等腰直角三角形、正方形模型要熟悉．

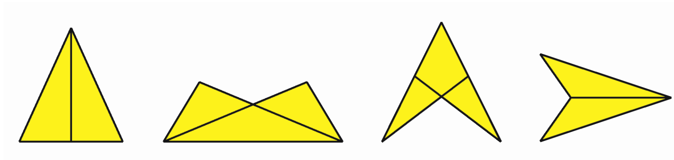
3. 图形中没有三角形全等，能够根据目标三角形的边角信息，结合题中条件，构造三角形的全等．常见的构造全等的方法有：（1）利用角平分线翻折构造全等；（2）截长补短，通过构建等线段，证明全等，转移边和角，常借助翻折或者旋转来寻找思路；（3）倍长中线、类倍长，实际上旋转 180° 来转移边角信息．有关“截长补短”和“倍长中线”见《全等三角形（二）》．

4. 熟悉下列全等三角形证明的基本图形：

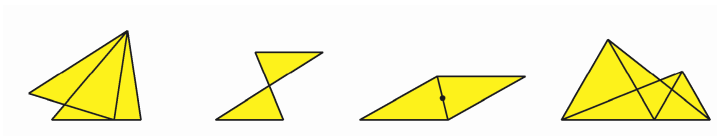
（1）平移全等形



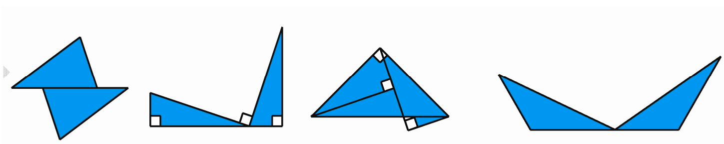
（2）对称全等型



（3）旋转全等型



（4）复合型全等型



习　题

基础过关

1. 判断正误：

（1）三边分别对应相等的两个三角形全等；（　　）

（2）两个内角分别对应相等的两个三角形全等；（　　）

（3）有两条边对应相等的两个直角三角形全等；（　　）

（4）有两条边和一个内角对应相等的两个三角形全等；（　　）

（5）三角形的 6 个边角元素中，有 5 个元素对应相等的两个三角形全等；（　　）

（6）全等三角形的对应边上的中线、高、角平分线对应相等；（　　）

（7）两边和其中一边上的中线（或第三边上的中线）对应相等的两个三角形全等；（　　）

（8）两角和其中一角的角平分线（或第三角的角平分线）对应相等的两个三角形全等；（　　）

（9）两边和其中一边上的高对应相等的两个三角形全等；（　　）

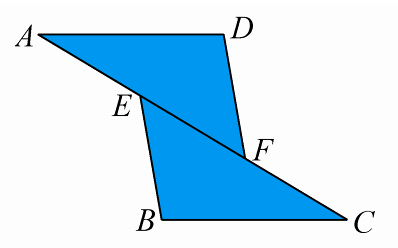
（10）一边及其他两边上的高对应相等的两个三角形全等；（　　）

（11）有两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等．（　　）

2. （1）如图，已知 $AE=CF$，$\angle AFD=\angle CEB$，那么添加一个条件后，仍无法判定$\triangle ADF\cong\triangle CBE$ 的是（　　）

A. $\angle A=\angle C$　　B. $AD=CB$

C. $BE=DF$　　D. $AD\parallel BC$

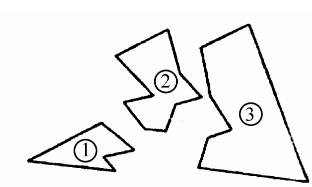


第（1）题图

（2）如图，某同学把一块三角形的玻璃打碎成了三块，现在要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃，那么最省事的办法是（　　）

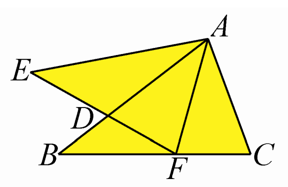
A. 带①去　　B. 带②去

C. 带③去　　D. 带①和②去



第（2）题图

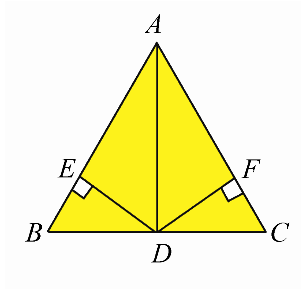
（3）如图，$\triangle ABC$ 与$\triangle AEF$ 中，$AB=AE$，$BC=EF$．$\angle B=\angle E$，点 F 在线段 BC 上，AB 交 EF 于 D．给出下列结论：①$\angle AFC=\angle C$；②$DF=CF$；③$BC=DE+DF$；④$\angle BFD=\angle CAF$．其



第（3）题图

中正确的结论是________（填写所有正确结论的序号）.

（4）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是$\triangle ABC$的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E，F．则下列四个结论：①AD上任意一点到点C，B的距离相等；②AD上任意一点到边AB，AC的距离相等；③$BD=CD$，$AD\perp BC$；④$\angle BDE=\angle CDF$，其中正确的个数为（　　）

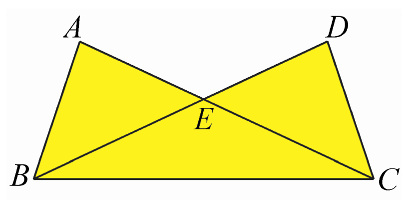


A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

3. 解下列各题：

（1）如图，$\triangle ABC$与$\triangle DCB$中，AC与BD交于点E，且$\angle A=\angle D$，$AB=DC$.

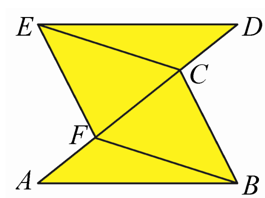
①求证：$\triangle ABE\cong\triangle DCE$；



②当$\angle AEB=50°$时，求$\angle EBC$的度数.

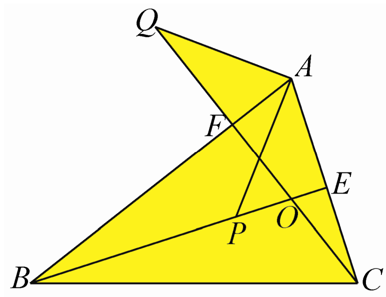
（2）已知：如图，A，F，C，D四点在同一直线上，$AF=CD$，$AB\parallel DE$，且$AB=DE$.

求证：①$\triangle ABC\cong\triangle DEF$；②$\angle CBF=\angle FEC$.

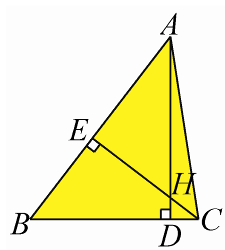


（3）如图，已知BE、CF是$\triangle ABC$的高，点P在线段BE上，Q在CF延长线上，且$BP=AC$，$CQ=AB$，试探索AP与AQ

的关系.

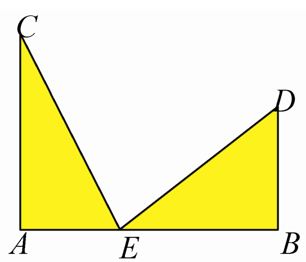


（4）如图，在△ABC 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$CE\perp AB$ 于点 E，AD、CE 交于点 H，已知 $EH=EB=3$，$AE=4$，求 CH.

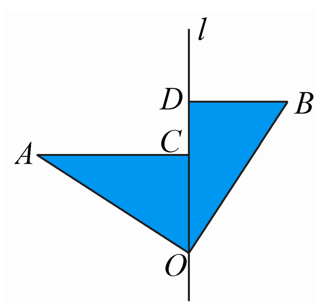


4. 解下列各题：

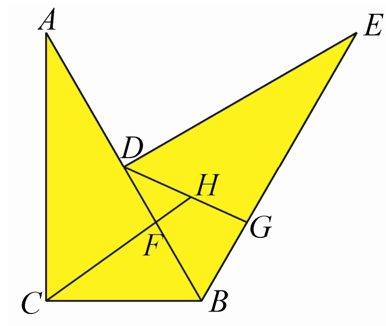
（1）如图，已知 $AC\perp AB$，$DB\perp AB$，点 E 在线段 AB 上，且 $AC=BE$，$AE=BD$，试猜想线段 CE 与 DE 的关系，并证明你的结论.



（2）如图，$\angle AOB=90°$，$OA=OB$，直线 l 经过点 O，分别过 A、B 两点作 $AC\perp l$ 交于点 C，$BD\perp l$ 于点 D. 求证：$AC=OD$.



（3）如图，把一个直角三角形 ACB（$\angle ACB=90^\circ$）绕着顶点 B 顺时针旋转 60°，使得点 C 旋转到 AB 边上的一点 D，点 A 旋转到点 E 的位置．F，G 分别是 BD，BE 上的点，$BF=BG$，延长 CF 与 DG 交于点 H．



①求证：$CF=DG$；

②求 $\angle FHG$ 的度数．

（4）如图，已知正方形 $ABCD$ 在直线 MN 的正上方，BC 在直线 MN 上，点 E 是直线 MN 上一点，以 AE 为边在直线 MN 的上方作正方形 $AEFG$．

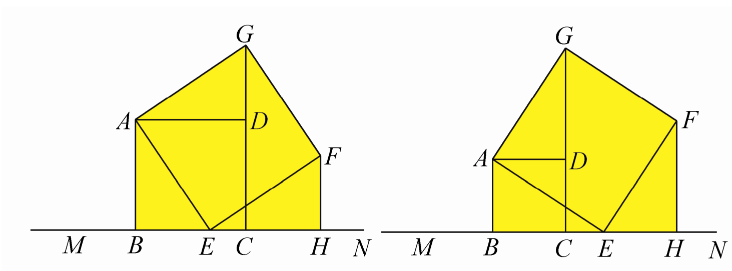


图 1　　　　图 2

①如图 1，当点 E 在线段 BC 上（不与点 B、C 重合）时：

判断 $\triangle ADG$ 和 $\triangle ABE$ 是否全等，并说明理由：

过点 F 作 $FH\perp MN$，垂足为点 H，观察并猜想线段 BE 和线段 CH

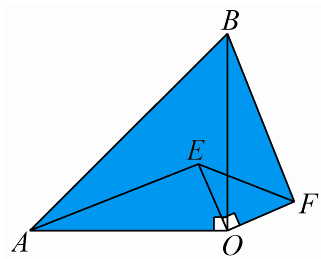
的数量关系，并说明理由.

②如图 2，当点 E 在射线 CN 上（不与点 C 重合）时：

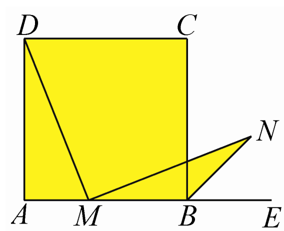
i. 判断△ADG 和△ABE 是否全等，并说明理由；

ii. 过点 F 作 $FH\perp MN$，垂足为点 H，已知 $GD=4$，求△CFH 的面积.

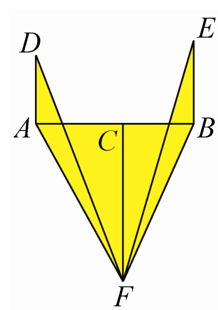
（5）如图，已知等腰 Rt△AOB 中，$\angle AOB=90°$，等腰 Rt△EOF 中，$\angle EOF=90°$，连结 AE、BF. 请猜想线段 AE 和线段 BF 的关系，并证明你给出的结论.



（6）如图，点 M 为正方形 $ABCD$ 的边 AB 上任意一点，$MN\perp DM$ 且与$\angle ABC$ 外角的平分线交于点 N，则 MD 与 MN 有怎样的数量关系？



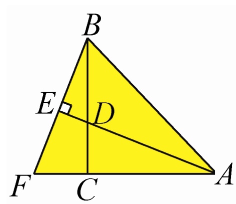
（7）如图，点 C 在线段 AB 上，$DA\perp AB$，$EB\perp AB$，$FC\perp AB$，且 $DA=BC$，$EB=AC$，$FC=AB$，$\angle AFB=51°$，求$\angle DFE$ 的度数.



5. 解下列各题：

（1）在△ABC 中，高 AD 和 BE 交于 H 点，且 $BH=AC$，求∠ABC.

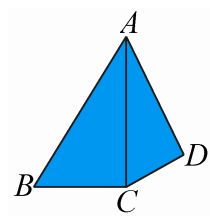
（2）如图，在△ABC 中，$AC=BC$，∠ACB=90°. AD 平分∠BAC，BE⊥AD 交 AC 的延长线于 F，E 为垂足. 则结论：①$AD=BF$；②$CF=CD$；③$AC+CD=AB$；④$BE=CF$；⑤$BF=2BE$，其中正确结论的个数是（　　）.



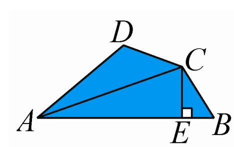
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 解下列各题：

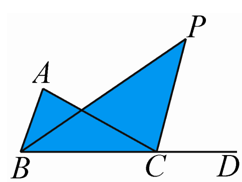
（1）如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分∠BAD，$AB>AD$，判断 AB 与 AD、CB 与 CD 的大小关系.



（2）如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分∠BAD，过点 C 作 CE⊥AB 于 E，并且 $AE=\frac{1}{2}(AB+AD)$，那么，∠ABC+∠ADC 的度数是________.

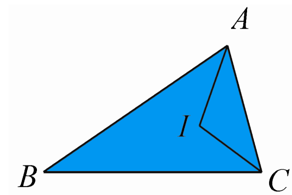


（3）如图，△ABC 的外角∠ACD 的平分线 CP 与内角∠ABC 的平分线 BP 交于点 P，若∠BPC=40°，

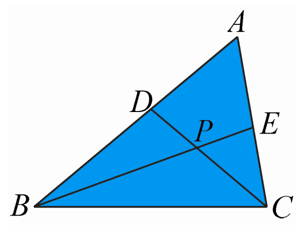


则∠CAP=________.

（4）如图，在△ABC 中，∠BAC、∠BCA 的平分线交于点 I，若∠B=35°，BC=AI+AC，求∠BAC 的度数.



（5）如图，已知△ABC 中，∠A=60°，BE、CD 分别平分∠ABC、∠ACB，P 为 BE、CD 的交点．求证：BD+CE=BC.



7. 解下列各题：

（1）①如图 1，已知△ABC，以 AB、AC 为边向△ABC 外作等边△ABD 和等边△ACE，连接 BE，CD 交于点 O．请你先完成图形（尺规作图，不写作法，保留作图痕迹），然后再解答下列问题. i. 证明：BE=CD；ii. 求∠EOC 的度数.

②如图 2，已知△ABC，以 AB、AC 为边向外作正方形 $ABFD$ 和正方形 $ACGE$．连接 BE，CD．探索 BE 与 CD 之间的关系，并简单说明理由.

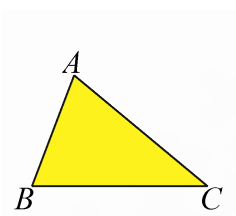


图 1

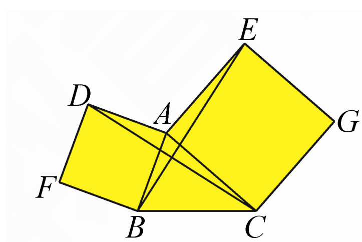


图 2

（2）已知：如图 1，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，AE 是过 A 的一条直线，且 B、C 在 AE 的两侧，$BD\perp AE$ 于 D，$CE\perp AE$ 于 E.

① 求证：$BD=DE+CE$；

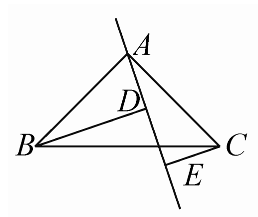


图 1

② 若直线 AE 绕 A 点旋转到图 2 位置时($BD<CE$)，其余条件不变，问 BD 与 DE、CE 的关系如何?请予证明；

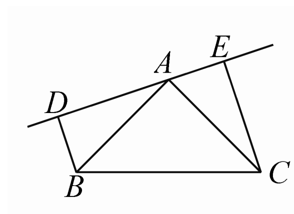


图 2

③ 若直线 AE 绕 A 点旋转到图 3 位置时($BD>CE$)，其余条件不变，问 BD 与 DE、CE 的关系如何?请直接写出结果，不须证明.

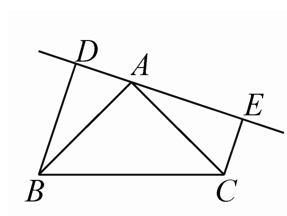


图 3

（3）如图，CD 是经过$\angle BCA$ 顶点 C 的一条直线，$CA=CB$，E、F 分别是直线 CD 上两点，且$\angle BEC=\angle CFA=\angle\alpha$.

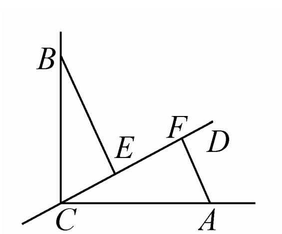


图 1

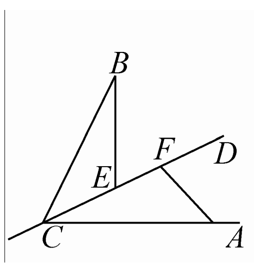


图 2

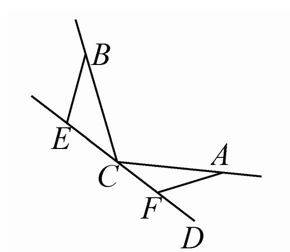


图 3

① 若直线 CD 经过$\angle BCA$ 的内部，且 E、F 在射线 CD 上，请解决下面两个问题：

i. 如图 1，若$\angle BCA=90°$，$\angle\alpha=90°$，则 BE______CF；EF______$|BE-AF|$（填“>”、“<”或“=”）；

ii. 如图 2，若 $0°<\angle BCA<180°$，请添加一个关于$\angle\alpha$ 与$\angle BCA$ 关系的条件________，使 i 中的两个结论仍然成立，并证明这两个结论.

② 如图 3，若直线 CD 经过$\angle BCA$ 的外部，$\angle\alpha=\angle BCA$，请提出 EF、BE、AF 三条线段数量关系的合理猜想，并给出证明.

（4）①如图 1，在正三角形 ABC 中，M、N 分别是 AC、AB 上的点，BM 与 CN 相交于点 O，若$\angle BON=60°$，判断 BM 和 CN 的数量关系；

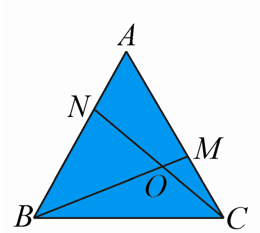


图 1

② 如图 2，在正方形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 CD、AD 上的点，BM 与 CN 相交于点 O，若$\angle BON=90°$，判断 BM 和 CN 的数量关系；

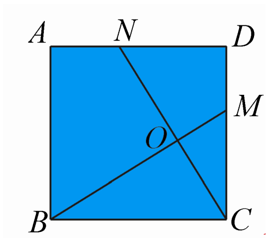


图 2

③如图 3，在正五边形 $ABCDE$ 中，M、N 分别是 CD、DE 上的点，BM 与 CN 相交于点 O，若$\angle BON=108°$，判断 BM 和 CN 的数量关系；

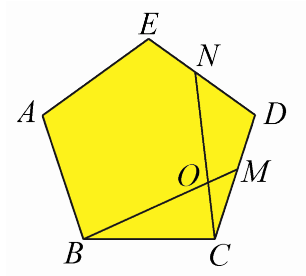


图 3

④通过上述例子，对于正 $n(n\geqslant3)$ 边形 $ABCDEF\cdots$（如图 4 所示），能否给出一个更一般的猜想？并证明其正确性；

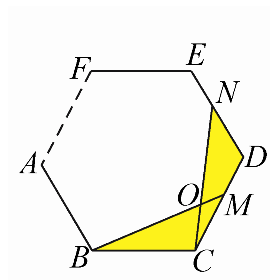


图 4

⑤如图 5，在正五边形 $ABCDE$ 中，M、N 分别是 DE、AE 上的点，BM 与 CN 相交于点 O，$\angle BON=108°$时，试问结论 $BM=CN$ 是否还成立，若成立，请给予证明．若不成立，请说明理由．

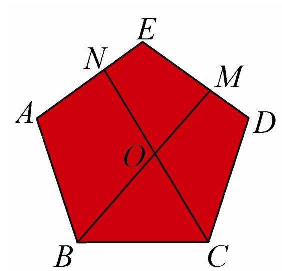


图 5

参考答案

第 1 讲　有理数与数轴

1.　判断

（1）×　（2）×　（3）×　（4）×　（5）×　（6）√　（7）×　（8）×

2.　（1）相反意义　（2）向西走 3m　（3）肯德基　（4）右侧 1007　（5）507

3.　（1）0；1　（2）0；0；1 和 −1；不存在；非负数　（3）$-\frac{1}{a}$；a；$-a$

4.　（1）4；0　（2）有理数，证明略.　（3）无理数，证明略.

5.　（1）±3　（2）7 或−3　（3）B 点

（4）$-\frac{4}{3}$　（5）12

6.　（1）2014　（2）①$1006 < a \leqslant 1007$　②$1006 \leqslant a < 1007$

7.　（1）7　（2）$-\frac{19}{3}$　（3）$-\frac{24}{5}$　（4）$-\frac{32}{5}$　（5）$\frac{7}{4}$；$\frac{19}{4}$　（6）$-\frac{5}{4}$

（7）$-\frac{9}{8}$、$-\frac{7}{4}$、$-\frac{19}{8}$　（8）$\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$　（9）①20 或−36　②−22 ③不变，10，理由略.

8.　25

第 2 讲　绝对值初步

1.　（1）D　（2）B　（3）D　（4）C　（5）C

2.　（1）绝对值等于 6 的数是±6，绝对值不超过 6 的整数有 13 个，绝对值小于 6 的非正整数有 0，−1，−2，−3，−4，−5

（2）8，2　（3）2　（4）−7　（5）$-a+2b+c$　（6）0　（7）−2006　（8）-1　（9）$x \leqslant \frac{3}{2}$

（10）A　（11）16

3.　（1）2　（2）16　（3）（1，0）（0，1）（1，1）　（4）2　（5）4，0，−4

（6）1915　（7）1　（8）3，−1

4.　（1）16　（2）$\frac{2014}{2015}$

5.　（1）① $\begin{cases}3-x, & x\leqslant 3\\ x-3, & x>3\end{cases}$　② $\begin{cases}-2x-3, & x<-2\\ 1, & -2\leqslant x\leqslant -1\\ 2x+3, & x>-1\end{cases}$

③ $\begin{cases}-5x-1, & x<-\frac{3}{2}\\ 5-x, & -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}\\ 5x+1, & x>\frac{2}{3}\end{cases}$　④ $\begin{cases}-3x-12, & x<-13\\ -x+14, & -13\leqslant x<-11\\ x+36, & -11\leqslant x\leqslant 12\\ 3x+12, & x>12\end{cases}$

（2）A 点　（3）$-2-x$　（4）① $x=-3$ 或 $x=4$；②3　（5）2　（6）2

（7）①1012036　②1013042　（8）无最小值，最大值 6　（9）① $1-a$，②23

（10）1006　（11）2013

第 3 讲　有理数计算（一）

1．（1）−2　（2）−3　（3）$8\frac{4}{5}$

2．（1）$255\frac{159}{247}$　（2）$\frac{45}{2}$　（3）2027091　（4）6　（5）$\frac{100!-1}{100!}$　（6）$\frac{103!}{3^{100}}-3!$

3．（1）226　（2）6035　（3）48　（4）1101

4．1006

第 4 讲　有理数计算（二）

一、1.　2 个　2.　1 个　3.　2 个

二、1.　20　2.　0　3.　0 或−2　4.　2

三、1.　12　2.　32　3.　28　4.　20　5.　$\frac{15}{64}$　6.　−5

四、1. 2　　2. （$\frac{1}{2}$，-1），（$-\frac{1}{2}$，-1）

五、1. 0　　2. 1　　3. 1 或-3　　4. $-\frac{1}{9}$　　5. 1

六、1. 24　　2. 16　　3. ①$(n-2)^2-1$；②$n-2$

第 5 讲　科学记数法，代数式的概念

一、1. B　　2. 9597000　　3. 1.08×10^{12}　　4. 3.57×10^{6}　　5. B

二、1. 6　　2. B　　3. 买三个足球，三个篮球后剩余的钱　　4. 231

5. ①②③④

三、1. （1）（2）（4）（5）（8）（9）（12）；（6）（10）（11）

2. C　　3. $m=4$，$n=1$

4. ①五次四项式；②$-\frac{3}{4}x^4y, 2xy^2, 3x^2, -1.3$；③$-1.3$；④$-1.3+2xy^2+3x^2-\frac{3}{4}x^4y$

5. D　　6.（1）15（2）36　　7. 三次三项式　　8. 3

第 6 讲　整式运算（一）整式加减

1. ① B　②A　③ 五次四项式；$-\frac{3}{4}x^4y+3x^2+\pi^6xy^3-1.3$；$-\frac{3}{4}$　④91

2. 略　　3. 是同类项的有（3）（5）（6）

4. （1）$\frac{1}{4}$　（2）$\frac{55}{97}$　（3）73　（4）4　（5）60　（6）4，7　（7）403

5. （1）2　（2）$20a-9b$

6. （1）$7x^2-5x+23$　（2）$-9x^2-17x+5$

7. （1）①44　② 4　（2）①36　②$\frac{17}{2}$

（3）① -21　②3　③32　④3　⑤-4　⑥ 4　⑦ 22　⑧ 1971　⑨-6　⑩-1

（4）C　（5）①$-\frac{1}{1003}$　② 75　③$\frac{1}{2}$ 或-1　④ 8 或-1

8. （1）6　（2）$m=2$，$n=-3$　（3）$\frac{2}{5}$　（4）4　（5）①$a=-3$，$b=1$　②17　③62

（6）2　（7）–2013　（8）B

9. ①–6　② 2015　③ 2013

10. （1）①32　② 33　③ 1024　④–496　⑤1023

（2）2　（3）$\frac{1}{2}$（提示：第 10 题的（1）（2）（3）均可考虑赋值法）

第 7 讲　含参数的一次方程（组）

1. 条件等式，恒等式，矛盾不等式，②③④⑤

2. 方程是含有未知数的等式；满足方程的未知数的值叫做方程的解；求方程解与无解的过程都叫做解方程.

3. ①②⑤⑧　　4. 等式的基本性质

5. ①x=0　② x=1　③ x=66　④ $x=-\frac{3}{4}$　⑤ x=2014　⑥x=4014　⑦x=1　⑧ x=6

习题

1. （1）×（2）×（3）×（4）×（5）×（6）×（7）×

2. 6

3. $a\neq 0$时，$x=\frac{b}{a}$；$a=0$，$b\neq 0$时，无解；$a=0$，$b=0$时，x为任意实数

4. 假设x_1,x_2是方程ax=b的解（$x_1\neq x_2$），则有$ax_1=ax_2=b$，所以$ax_1=ax_2$，故a（x_1-x_2）=0，因为$x_1\neq x_2$，所以a=0，b=0，所以原方程有无数多个解

5. （1）a=b 时，无解；$a\neq b$时，$x=\frac{1}{b-a}$

（2）a+b=0 时，x为任意实数；$a+b\neq 0$且$a\neq 0$时，$x=\frac{b}{a}$，$a+b\neq 0$且$a=0$是，无解

（3）$\begin{cases} m=-1，x\text{取任意实数} \\ m\neq -1,\begin{cases} m\neq 0，x=\frac{m-1}{m} \\ m=0，\text{无解} \end{cases} \end{cases}$　（4）$\begin{cases} k=-2，x\text{取任意实数} \\ k\neq -2,\begin{cases} k\neq 0，x=\frac{1}{k} \\ k=0，\text{无解} \end{cases} \end{cases}$

（5）$\begin{cases} b\neq 0，x=\frac{a^2(b-a)}{b(a+b)} \\ b=0，\text{无解} \end{cases}$　（6）$x=\frac{1}{2}$

6.　（1）$m=3$　（2）$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{4}$　（3）0

7.　B　8.　$m=\frac{12}{5}$，$n=-\frac{18}{5}$　9.　1　10.　16个　11.　A

12.　（1）$\begin{cases}x=13\\y=-7\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x=\frac{4}{11}\\y=\frac{1}{22}\end{cases}$　（3）$\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3\\y=4\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x=12\\y=15\\z=18\end{cases}$　（5）$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

（6）$\begin{cases}p=2\\q=3\\r=1\end{cases}$　（7）$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0$；$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=1$

13.　（1）$\begin{cases}m=5\\n=2\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$　（3）$\begin{cases}a=-\frac{7}{5}\\b=10\end{cases}$，$\begin{cases}x=20\\y=\frac{41}{5}\end{cases}$

14.　（1）$\begin{cases}a=2\text{，有无穷多组解}\\a=-1\text{，无解}\\a\neq 2,-1,\begin{cases}x=\frac{a+2}{a+1}\\y=\frac{1}{2(a+1)}\end{cases}\end{cases}$　（2）$\begin{cases}m=n\text{，无解}\\m\neq n\begin{cases}a\neq b\begin{cases}x=\frac{(a+m)(a+n)}{a-b}\\y=\frac{(b+m)(b+n)}{b-a}\end{cases}\\a=b\text{，无解}\end{cases}\end{cases}$

15.　（1）$a=4$ 时，方程组有无数多组解；$a\neq 4$ 时，只有一组解

（2）$k\neq 1$ 或 $k=1$，$m=4$ 时，至少有一组解

16.　$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$　17.　$\frac{54}{11}$

第 8 讲　一元一次不等式与一元一次不等式组

习题

1.　略　2.　$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$　3.　证明略　4.　D　5.　D　6.　$\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$

7.　（1）$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}(a>b>0,\ m>0)$

（2）$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots b_n}$（$a_1$，$a_2\ldots a_n>0$；$b_1$，$b_2\ldots b_n>0$）

（3）若 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\cdots<\frac{a_n}{b_n}$，则 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots b_n}<\frac{a_n}{b_n}$

（a_1，$a_2\cdots a_n>0$；b_1，$b_2\cdots b_n>0$；$a_1<b_1$，$a_2<b_2$，$\cdots a_n<b_n$）

8. -1

9. $\frac{4}{3}<a<\frac{14}{3}$　　10. $x\leqslant\frac{5}{6}$　　11. 最大值是 4，最小值是 $-\frac{36}{11}$

12. $m>-\frac{5}{4}$　　13. $m>4$　　14. $x>3$

15.（1）$\begin{cases} m>\frac{3}{2},\ x<\frac{n-3}{2m-3} \\ m=\frac{3}{2},\begin{cases} n>3,\ x\text{为任意实数} \\ n\leqslant 3,\ \text{无解} \end{cases} \\ m<\frac{3}{2},\ x>\frac{n-3}{2m-3} \end{cases}$　　（2）$x\geqslant 8$　　（3）$\begin{cases} a>0,\ x<\frac{1}{a} \\ a=0,\ x\text{取任意值} \\ a<0,\ x>\frac{1}{a} \end{cases}$

16. $a<-1$　　17. $a=0$　　18. $9\leqslant a<12$　　19. $x<\frac{3}{5}$　　20. $8<m<32$

21. $-4<k<1$　　22. 最大值 7，最小值 $-\frac{1}{6}$　　23. 最大值 $35\frac{1}{3}$，最小值 19

24. $m\leqslant 1$　　25. $a\leqslant -2$　　26. $a\geqslant 3$　　27. $a>4$　　28. $-\frac{11}{4}\leqslant a<-\frac{5}{2}$

29. $2\leqslant a<3, 13<b\leqslant 15$　　30. 72　　31. $\begin{cases} m\leqslant 1,\ x\text{取任意实数} \\ m>1,\ x\leqslant\frac{5-m}{2}\text{或}x\geqslant\frac{5+m}{2} \end{cases}$　　32. $m\leqslant\frac{1}{2}$

第 9 讲　整式运算（二）幂的运算

1.（1）√（2）×（3）√（4）×（5）√（6）×（7）×（8）×（9）×

2. 略

3.（1）10^{2n+2}　　（2）$(3x-y)^{10}$　　（3）a^{12}　10^{a+b}

（4）$625x^8y^{12}$　$x^{12}y^{24}$　$-a^{99!}$　　（5）$a^{20}b^8$

4.（1）1　　（2）1　　（3）$-\frac{2}{3}$　　（4）2^{2013}　　（5）-2^{2013}　　（6）0

（7）$\frac{9}{49}$　　（8）6

5．（1）$m=2$　（2）$x=2$　（3）$x=\frac{5}{2}$　（4）$n=12$　（5）$n=2$ 或 $n=-1$ 或 $n=-2$ 或 $n=0$

（6）（6，0）（3，2）（0，4）　（7）$x=\pm\underbrace{6\cdots6}_{2014个6}8$　（8）存在 $a=3$，$b=2$，$c=2$

（9）（1，1）（2，2^{25}）（4，2^{25}）（5，5^{10}）

（10，10^5）（25，25^2）（50，50）（100，10）

6．（1）①$3a$　②1457　③$\frac{27}{4}$　（2）①B　②A

（3）①8　②16　（4）1　（5）①1　②1　③略　（6）$d-b=269$

7．（1）①=　②>　③>　④>　⑤>　（2）$a<b<d<c$

（3）①$2^{55}<6^{22}<3^{44}<5^{33}$　② 7　（4）$a>b>c$

（5）①<　②>　（6）$M>N$　（7）$P=Q$　（8）$a=b$　（9）$A>B$

（10）（1）①<；②<；③>；④>；⑤>

（2）当 $n\leqslant 2$，n 是自然数时，$n^{n+1}<(n+1)^n$；当 $n>2$，n 是自然数时，$n^{n+1}>(n+1)^n$

（3）>

8．（1）4　9　5　1　6　（2）7　3　3　（3）75　（4）752

第 10 讲　整式运算（三）整式的乘除法

1．判断

（1）√　（2）×　（3）√　（4）×　（5）×　（6）×

2．

（1）$4a^8b^{10}c^3$　（2）$-3x^5+2x^3y+\frac{1}{2}x^2$　（3）$4x^2-6xy+\frac{9}{4}y^2$　（4）x^4-3x^2+x-3

（5）$-\frac{1}{36}x^7y^2$　（6）$\frac{9}{10}mn-\frac{3}{2}m^2-1$　（7）$-(x+y)^{4n-1}$　（8）1

3．（1）商式：$(x-1)$，余式：3　（2）商式：$x^2-x+\frac{1}{2}$，余式：0

（3）商式：$(x^3-7xy^2+6y^3)$，余式：1　（4）商式：x^2+2x-8，余式：1

（5）商式：$1+x+x^2$，余式：0　（6）商式：$3x^2-5x-8$，余式：$15x+26$

（7）$1+x+x^2+\cdots x^{n-1}$

4. （1）①拼图略，$a^2+2b^2+3ab=(a+b)(a+2b)$　　②3，7

（2）①80　②312　③1200

（1）-10，-7，12　　（2）4，4，1　　（3）6

（4）$p=3$，$q=1$　　（5）$a=3$，$b=1$　　（6）$m=-2$，$n=-28$

（7）$a=-2$　　（8）$m=-5$，$n=20$　（9）-2

（10）①12　②14　③$a=2$，$b=-7$，$c=4$　　（11）不矛盾，理由略

6. （1）（2）（3）略　　（4）-1，-2，-3　　（5）$2x+1$

（6）x　　（7）$g(x)=x^2+2x+1$，$h(x)=x+1$

（8）$f(x)=-\frac{5}{3}x^3+3x^2+\frac{11}{3}x-8$　　（9）$f(x)=x^2-2x+5$

第 11 讲　整式运算（四）乘法公式

一、1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　2. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

3. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$　　4. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

二、（1）$16a^2-4b^2$　（2）y^2-25x^2　（3）$\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2$　（4）$25x^2y^2-4$　（5）$9m^2-24mn+16n^2$

（6）$x^2+\frac{1}{x^2}-2$　（7）$8m^3+n^6$　（8）$27x^6-8y^3$　（9）$x^{3m}+x^{3n}$

（10）$a^3+3a^2b^m+3ab^{2m}+b^{3m}$　　（11）$a^2+b^4+c^6-2ab^2-2b^2c^3+2ac^3$

三、1. ±3　　2. ±2　　3. $-2ab$，$2ab$，$4ab$，$4ab$　　4. $3xy$

5. $m^2,4n^2$　　6. $\frac{1}{3}a$，$\frac{1}{4}b$，$\frac{1}{4}c$　　7. $2m-n+4p$

四、1. x^4-8x^2+16　　2. $x^2-25y^2+90y-81$　　3. $4-4x^2+4xy-y^2$

4. $-4y+1$　　5. $2x^2-2xy$　　6. $x^6+16x^3y^3+64y^6$

7. $64a^6+16a^3b^3+b^6$　　8. $a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6$　　9. $a^6-\frac{1}{729}$

五、1. 3599.96；合数　　2. $\frac{224}{225}$　　3. 合数　　4. 1　　5. -130779

6. $2^{64}-1$；　　7. $2-\frac{1}{2^{4n-1}}$　　8. $\frac{3^{64}-1}{2}$；　　9. $2^{2^n}-1$　　10. 4

11. $\frac{1}{2}$　　12. $a<b<c$　　13. $a<b<c$　　14. 337

六、1.　4 或-4　　2.　10，82，26

【巩固】（1）50　（2）1　（3）125

3.　4030　　4. $\frac{5}{2}$，$\frac{7}{2}$，$\frac{19}{4}$，$\frac{13}{2}$，$\frac{71}{8}$

【巩固】（1）$\frac{11}{81}$

（2）根据题中条件可知$(x+y)^2=(a+b)^2$；　$(x-y)^2=(a-b)^2$　，进而确定$x+y=a+b$，$x-y=\pm(a-b)$，解得，$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$或$\begin{cases}x=b\\y=a\end{cases}$，从而得证

5.　1007　　6.　7，5，18，47，123

【巩固】（1）24　（2）$\frac{a^2}{1-2a}$

7.　3　　8.　等边　　9.　$-\frac{2}{25}$　　10.　± 8　　11.　$-\frac{1}{2}$

12.　45　　13.　1　　14.　0 或±1　　15.　4　　16.　150

七、1.（1）±18　（2）36　（3）±3　（4）$4x$，$-4x$，$4x^4$，-1，$-4x^2$

2.　1　　3.（1）-16　（2）-8　（3）3

4.　$x_1=x_2=\cdots x_n=0$，$x_1=x_2=\cdots x_n=1$

5.（1）当$x=2$时，最小值为 4　（2）当$x=3$时，最大值为-6

6.　最小值为 1

7.（1）略.提示：配方，写成两个完全平方+常数的形式

（2）当 $a=1$，$b=-3$ 时，最小值为 1

8.（1）1　（2）6

八、1.（1）2014　（2）$2013=1007^2-1006^2=337^2-334^2=97^2-86^2=47^2-14^2$.

（3）①1508　②747　③505008

2.　2.904 或 136　　3.　1 个质数，101

4.（1）略，提示，分偶数和奇数两种情况考虑　（2）2 个，144，1444

5.　2 个　　6. $p=3$，$p=7$

九、1.（1）$4\times6-5^2=24-25=-1$　（2）$n\times(n+2)-(n+1)^2=n\times(n+2)-(n^2+2n+1)=-1$

（3）一定成立，理由略

2.（1）$17^2-9^2=8\times26$，$19^2-7^2=8\times39$（答案不唯一）

（2）任意两个奇数的平方差等于 8 的倍数

（3）略

3.（1）$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$

（2）$2011\cdot2012\cdot2013\cdot2014+1=(2011\times2014+1)^2$

4. 略　　5. 略

第 12 讲　因式分解(一)——有理数范围内的因式分解

一、1. $\frac{1}{12}a^{2n-1}(9a^n+2)$　2. $3a^2b(x+y)(b+c)[x+y-2ab^2-2abc]$　3. $2p(x-1)^2[3x-4p-4]$

二、1. $3x^2y(5x^2-2y^2)(5x^2+2y^2)$　2. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$　3. $16(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

4. $(2c-3ab)(2c+3ab)(4c^2+9a^2b^2)$　5. $(3x-4y)^2$　6. $-6(a-1)^2$

7. $a^{n-2}(a^2+4)^2$　8. $[ax-ay+bx+by]^2$　9. $-(a-b)^2(a+b)^2$

10. $(a+b-c)^2$　11. $(2a+3b-3c)^2$　12. $(3a+1+x^n)^2$

13. $(2x+3y)^3$　14. $(3a-1)^3(3a+1)^3$　15. $8q^3$

16. $(2ab-1)(4a^2b^2+2ab+1)$　17. $4b^3(2a-b^2)(4a^2+2ab^2+b^4)$

18. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$　19. $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

20. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

三、1. $(x-2)(x^4+x^2-1)$　2. $(x^2+1)(x^2+x+1)$　3. $(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$

4. $(bc-ad)(ac+bd)$　5. $3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

四、1. $(x-1)^2(x^2+2x+3)$　2. $(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$

3. $(x^4-x^2+1)(x^2+1-x)(x^2+1+x)$　4. $-(a+c+b)(a+c-b)(a-c+b)(a-c-b)$

五、1. $(x-5)(x-1)$　2. $(x-3)(x+2)$　3. $(2x-1)(3x-2)$

4. $(y-1)(5y-1)$　5. $-(2y+1)(3y-1)$　6. $(y-2)(2y-3)$

7. $(x-y)(x-5y)$　8. $(x-3y)(x+2y)$　9. $(2x-y)(3x+2y)$

10. $(abx+c)(cx+ab)$　11. $(x+3a-b)(x+3b-a)$　12. $(x+a+b)(x+c)$

六、1. $(x-y+1)(x+3y+2)$　2. $(x-3y-3z)(x-3y-2z)$　3. $(x+y+1)(x-y-4)$

4. $(x+2y)(x+y+2)$　5. $(2x+3y+1)(x-2y+3)$　6. $(2x+3y+2)(2x-3y+1)$

7. $(4x+y+z)(x+2z)$　8. 43，-78　9. 证明略

七、1. $(x-1)(x-3)(x^2+x+1)(x^2+3x+9)$　2. $(x-3y)(x+2y)(x^2+3xy+9y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

3. $9(x+1)^2(x^2+4x+1)$　4. $(x^2+x+4)(x^2+x-3)$　5. $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

6. $(x^2+10x+18)(x^2+10x+22)$　7. $2(a^2-4a+16)^2$

八、1. $[(b+c)a-bc](a-b-c)$　2. $[(y+1)x+y][yx+y+1]$

3. $[(y-1)a+(x-1)b][(y-1)b-(x+1)a]$ 4. $(x+1)(x-1)[(1-y)x+1+y][(1-y)x-1-y]$

九、1. $(x-2)(x-4)(x-3)$　2. $(x-2y)(x-4y)(x-3y)$

3. $(1-2y)(1-3y)(1-4y)$　4. $\frac{1}{3}(x-3)(3x+1)(x+1)$　5. $(x-1)(x+1)[(a-1)x-a+2]$

6. $(x-1)(x+2)[(l+m)x-m-n]$　7. $8(x+\frac{a}{2})(x+\frac{b}{2})(x+\frac{c}{2})$　8. $(x^2-x+1)(x^2+2x+3)$

9. $(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$

十、1. $(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$　2. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

3. $3(y-z)(z-x)(x-y)$　4. $4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

5. 0　6. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(y-z)(y^2+yz+z^2)(z-x)(z^2+zx+x^2)$

7. $5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$　8. $5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

9. $(x-y)(y-z)(z-x)(xyz+x+y+z)$

十一、1.（1）否，思路提示，可以考虑因式分解　（2）$n=3$

2. 28645　3. 等边三角形　4. 74 个　5. 13121 可以，12131 不可以

6. 不可以　7. 4 组　8. 8 个

第 13 讲　相交线

习题

1.　证明略

2.（1）0，5，8，9，　11，12，13，14，15（根据无平行，一组平行，两组平行、三组平行分析）；

（2）0，1，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15.

3.（1）21　（2）略　（3）0，6，10，11，12，14，15，16，17，18，20，21（方法如第 2 题）.

4. 先考虑 9 条直线两两相交，且任三条直线不共点，则有 36 个交点，而 29=36–2–2–3，所以再让图形满足一个三线共点，一个四线共点即可.

5.（1）4，6，7　　（2）5，6，9，10，11.

（3）16　　（4）$\frac{n(n+1)}{2}+1$

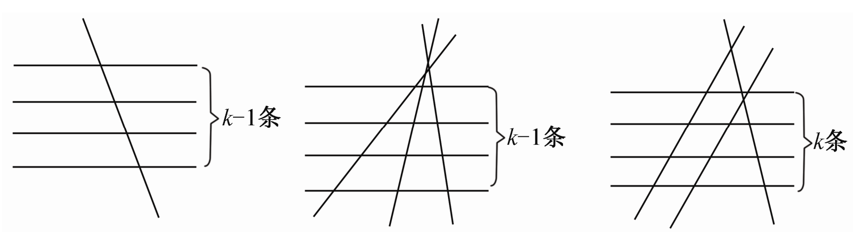
6.（1）$n+1$；（2）$\frac{n(n+1)}{2}+1$；（3）$\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1$.

【巩固】

（1）16　　（2）26 个部分，图形略

7.　按已知，使用的直线中至少有两条相交，它们把平面分成 4 个区域．再任作 1 条直线，至少还要增加 2 个区域，所以恰有 5 个区域的分法是不可能的．因此有 $n_0 \geqslant 5$.

另一方面，任意 $n>5$ 个区域的分法都是可以实现的．对于 $n=2k$，$4k+3$，$4k+5$ 的情形，可按下图所示的方法来划分：



可见，最小的$n_0=5$.

第 14 讲　相交线与平行线

1．$\angle 3$；　　$\angle 1$、$\angle 3$；　　$\angle BOE$，$\angle AOD$，$\angle 4$.

2． 45°　　3．$\angle\alpha+\angle\beta=90°$，$\angle\beta-\angle\alpha=30°$，$\alpha=\beta$，　$\alpha+\beta=105°$ 或 $\beta-\alpha=15°$．

4．（1）AC，AB，DE，同位角.

（2）AC、DE，AB，同旁内角；

（3）AC、AB，DE，内错角.

巩固：（1）AB，AC，BC，同旁内角.

（2）AD、BC、AC，内错角；

（3）AC、DC、AD，同位角.

5. 24　　6．4054182.

二、1．$\angle AED=\angle ACB$；同角的补角相等；内错角相等，两直线平行；$\angle 3=\angle ADE$；已知；等量代换；同位角相等，两直线平行；两直线平行，同位角相等.

2．已知；垂直的定义；已知；三角形的内角和；对顶角相等；已知；等量代换；同位角相等，两直线平行.

3~5. 证明略.

6．（1）思路提示，可以考虑过点 E 作 AB 的平行线；（2）平行，思路提示，可以考虑过点 E 作 AB 的平行线；（3）$\angle B+\angle D+\angle E=360°$；（4）$\angle B-\angle D=\angle E$；

（5）$\angle E+\angle G=\angle B+\angle F+\angle D$；　　（6）$\angle E_1+\angle E_2+\cdots+\angle E_n=\angle B+\angle F_1+\cdots+\angle F_{n-1}+\angle D$．

7．思路提示，考虑分别过 E、F，作 AB 的平行线

8．（1）略；　（2）60°.　9．略

三、1．5　　2．4　　3．11　　4．$\angle 2=\angle 3$　　5．10°或 50°　6．110　　7．46

8．（1）180°；360°；540°，720°.　　（2）$180°(n-1)$　　（3）110°

9．40°　　10．180°

11．60°，120°　　12．（1）100°，90°；（2）90°，90°；（3）90°

四、1．略．2. 略

五、1．略．2.（1）12；（2）3240°

第 15 讲　三角形的内角和与三角形中的重要线段.

1．$75° \leqslant \angle B \leqslant 100°$　2．59°　3．3:2:1　4．120°或 60°

5．（1）3；（2）略；（3）$\angle E = \alpha - \beta$；（4）$\frac{1}{2}$.

6．不发生变化，45°.　7．（1）$\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$　（2）略

8．$\angle BPC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$，$\angle N = \frac{1}{2}\angle A$，$\angle M = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

9．$\frac{\alpha}{2^{2015}}$　10．$\angle P = \frac{d+c}{2}$　11．（1）33°；（2）123°.

12．（1）$\angle DAE = \frac{\angle C - \angle B}{2}$；（2）保持（1）中关系不变.

13．（1）C（3，0），E（－4，0）．（2）$\angle Q$=15°；（3）不发生改变，值为 1.

14．4030　15．7，（2m+1），（2m+2），（2m+n－2），2014×2+8－2=4034.

【近年竞赛题选编】

1．129°，2．25°，3．123°.

第 16 讲　三角形的三边不等式关系

一、1. 3　2. 2＜x＜8　3. 等腰　4. 5　5. 5

二、1. 30　2. 21 个　3．12　4. 2　等腰

5．4　6．（15，40，45），（16，36，48）　7．11

三、1．B　2．$n_{\max} = 10$，有 7 种方法，具体方法略.　3．$k_{\min} = 17$

四、1.（1）$2(PA + PB + PC) > AB + BC + CA$，证明略.

（2）$AB + BC + CA > PA + PB + PC$

2. 证明略

第 17 讲　多边形内角和与平面镶嵌

1. 略　　2.（1）$\frac{n(n-3)}{2}$　（2）6　（3）720°　（4）十三　（5）49　70

3. （1）36　（2）28°　（3）60°　（4）75　（5）12.5　（6）$\frac{100}{3}$

4. （1）n=17　（2）104　（3）14 或 15　（4）4、10 或 6、8

（5）18 或 19 或 20　（6）72°或 144°

5. （1）6　（2）7　（3）9　（4）3　（5）3　（6）$n-3$

6. （1）180°　（2）540°　（3）$360°n-540°$

7. （1）360°　（2）540°　（3）240°　（4）120°　（5）1080°

8. （1）证明略　（2）①$DE \perp DF$　证明略.　②$DE \parallel DF$　证明略.

9. （1）108° 120°　$\frac{(n-2)180°}{n}$　（2）正三角形　正方形　正六边形　理由略

（3）如：正方形和正八边形，此时符合条件的图形只有一种，草图略.

10. 略

11. （1）$\frac{1}{2}$　（2）6 种　　12. 3 ；6

13. 五边形，六边形，七边形、八边形、九边形、十边形、十一边形、十二边形.

14.（1）共 4030 个三角形，引了 6043 条线段.

（2）能，理由略

（3）$C_n^4+\frac{1}{2}n(n-3)+1$

第 18 讲　全等三角形（一）

习题

1.（1）√（2）×（3）√（4）×（5）×（6）√

（7）√（8）√（9）×（10）×（11）×

2. （1）B　（2）C　（3）①③④　（4）D

3. （1）①略 ②25° （2）略 （3）$AP=AQ$，$AP\perp AQ$，理由略 （4）1

4. （1）$CE=DE$，$CE\perp DE$ （2）略 （3）①略 ②120°

（4）①全等，理由略；$BE=CH$，理由略.②全等，理由略；$\triangle CFH$ 的面积为 8.

（5）$AE=BF$，$AE\perp BF$ （6）$MD=MN$ （7）39°

5. （1）45° 或 135° （2）D

6. （1）$AB-AD<CB-CD$ （2）180°（3）50°（4）70°（5）略

7.（1）①通过证明$\triangle DAC\cong\triangle BAE$ 证明 $BE=CD$，$\angle EOC=60°$ ②$BE=CD$，$BE\perp CD$

（2）①提示证明$\triangle DAB\cong\triangle ECA$ ② $BD=DE-EC$ 证明略 ③ $BD=DE-EC$

（3）①=，=；互补 ②$EF=BE+AF$，理由略

（4）①$BM=CN$ ②$BM=CN$ ③$BM=CN$ ④$BM=CN$ ⑤成立，提示连接 EC，BD，证明$\triangle NEC\cong MDB$.

反侵权盗版声明